УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЛЕСОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УГЛТУ

МАТЕМАТИКА

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПЕРВЫХ КУРСОВ УРАЛЬСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ЛЕСОТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования

«Уральский государственный лесотехнический университет»
(УГЛТУ)

Вдовин А.Ю.
Демидова И.Н.
Золкина Л.А.
Мухина В.М.
Рублева С.С.
Удинцева С.Н.
Федоровских Е.С.

МАТЕМАТИКА

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПЕРВЫХ КУРСОВ УРАЛЬСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ЛЕСОТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Учебно-методическое пособие

Екатеринбург
2021

УДК 51
ББК 22.1
М34

Рецензенты:

Пименов В.Г.- заведующий кафедрой вычислительной математики и компьютерных наук УрФУ д.ф.-м.н, профессор;

Ложников А.Б. – кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры прикладной математики УралЭНИН УрФУ

Вдовин А.Ю

М34 Математика. Учебно-методическое пособие для обучающихся первых курсов Уральского государственного лесотехнического университета**:** учеб. - метод. пособие / И.Н. Демидова, Л.А. Золкина, В.М. Мухина, С.С. Рублева, С.Н. Удинцева, Е.С. Федоровских. – Екатеринбург:Урал.гос. лесотехн. Ун-т, 2021. - 78

ISBN

Данное пособие адресовано в первую очередь первокурсникам всех направлений подготовки и соответствует принятым в вузе учебным программам и включает следующие главы: элементы линейной и векторной алгебры, аналитическая геометрия на плоскости (I семестр), введение в математический анализ, основы дифференциального и интегрального исчислений, элементы теории обыкновенных дифференциальных уравнений (II семестр).

Печатается по решению редакционно-издательского совета Уральского государственного лесотехнического университета.

УДК 51
ББК 22.1

ISBN

© ФГБОУ ВО «Уральский государственный лесотехнический университет», 2019
© А.Ю. Вдовин, И.Н. Демидова, Л.А. Золкина, В.М. Мухина, С.С. Рублева, С.Н. Удинцева Е.С,. Федоровских. 2021

Оглавление

Предисловие 5

I. Методические указания 6

1. Линейная алгебра 6

Справочный материал 6

Методические указания к решению заданного варианта 10

2. Векторная алгебра 13

Справочный материал 13

Методические указания к решению заданного варианта 19

3. Аналитическая геометрия 22

Справочный материал 22

Методические указания к решению заданного варианта 27

4. Предел 30

Справочный материал 30

Методические указания к решению заданного варианта 31

5. Производная 34

Справочный материал 34

Методические указания к решению заданного варианта 35

6. Исследование функций 37

Справочный материал 37

Методические указания к решению заданного варианта 39

7. Интегралы 44

Справочный материал 44

Методические указания к решению заданного варианта 47

8. Дифференциальные уравнения 51

Справочный материал 51

Методические указания к решению заданного варианта 52

II. Варианты контрольных работ, правила оформления 55

Контрольные задания (1 семестр) 56

Вариант 1 56

Вариант 2 58

Вариант 3 59

Вариант 4 60

Вариант 5 61

Вариант 6 62

Вариант 7 63
Вариант 8 64
Вариант 9 65
Вариант 10 66
Контрольные задания (2 семестр) 67
Вариант 1 67
Вариант 2 68
Вариант 3 69
Вариант 4 70
Вариант 5 71
Вариант 6 72
Вариант 7 73
Вариант 8 74
Вариант 9 75
Вариант 10 76

Предисловие

Данное пособие адресовано первокурсникам всех направлений подготовки очной и заочной форм обучения Уральского государственного лесотехнического университета, изучающим дисциплину «Математика».

Его содержание соответствует принятым в вузе учебным программам и включает следующие главы: элементы линейной и векторной алгебры, аналитическая геометрия на плоскости (I семестр), введение в математический анализ, основы дифференциального и интегрального исчислений, элементы теории обыкновенных дифференциальных уравнений (II семестр).

Каждая из глав содержит необходимую теоретическую информацию, а также разбор примеров использования основных методов решения типовых задач с подробными разъяснениями. Тщательная самостоятельная проработка материала предлагаемого пособия позволит обучающимся овладеть необходимым минимумом теоретических знаний и практических навыков, необходимых для освоения курса математики.

Также оно может быть рекомендовано обучающимся очной формы для использования при подготовке к промежуточным и итоговым формам аттестации по дисциплине.

I. Методические указания

1. Линейная алгебра

Справочный материал

1. Матрицы. Основные понятия.

Система из ***m·n*** действительных чисел, расположенных в виде прямоугольной таблицы, содержащей ***m*** строк и ***n*** столбцов, называется ***матрицей*** размеров ***m×n***.

Матрица записывается в виде

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или, сокращенно, $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, где a_{ij} - элементы матрицы, i - номер строки $\left(i=\overline{1,\,m}\right)$, j - номер столбца $\left(j=\overline{1,\,n}\right)$.

Две матрицы $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ и $B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$ одинаковых размерностей называются ***равными***, если равны между собой все соответствующие элементы матриц, т.е. $A=B$, если $a_{ij}=b_{ij}$ $\left(i=\overline{1,\,m},\ j=\overline{1,\,n}\right)$.

Квадратная матрица – матрица, у которой число строк равно числу столбцов, т.е. $m=n$.

$$A_{n\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Квадратную матрицу размеров $n\times n$ называют матрицей n - ***го порядка***. Элементы матрицы $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ образуют ***главную диагональ***.

Транспонированная матрица к A – матрица, полученная из A заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером. Обозначается A^T.

2. Линейные операции над матрицами.

Сумма двух матриц $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ и $B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$ одинаковых размеров – матрица $C_{m\times n}$, элементы которой равны суммам одноименных элементов слагаемых матриц, т.е. $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}, i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$.

Произведение матрицы $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ ***на число*** λ - матрица $B_{m\times n}$, элементы которой равны произведениям соответствующих элементов матрицы *A* на число λ, т.е. $B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}=\left(\lambda a_{ij}\right)_{m\times n}$.

Разность двух матриц $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ и $B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$ одинаковых размеров – матрица $D_{m\times n}=A-B=\left(d_{ij}\right)_{m\times n}=\left(a_{ij}-b_{ij}\right)_{m\times n}$.

3. Умножение матриц.

Умножение матрицы *A* ***на матрицу*** *B* определено, если ***число столбцов*** первой матрицы равно числу ***строк*** второй матрицы.

Произведением матрицы A на матрицу B называется матрица $C_{m\times k}=A_{m\times n}\cdot B_{n\times k}$, элементы которой c_{ij} равны сумме произведений элементов i - й строки матрицы *A* на соответствующие элементы j - го столбца матрицы *B*, т.е.

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj},\ \left(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,k}\right).$$

4. Определители квадратных матриц.

Обозначение определителя матрицы *A*:

$$|A|=\det A=\Delta.$$

Определитель второго порядка – определитель квадратной матрицы второго порядка $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, вычисляется по формуле:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

Определитель второго порядка – это число, равное разности произведения элементов главной диагонали и произведения элементов побочной диагонали.

Определитель третьего порядка – определитель квадратной матрицы третьего порядка $A=\left(a_{ij}\right)_{3\times 3}$ – это число, которое может быть вычислено по формуле:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Существуют и другие способы вычисления определителя третьего порядка.

5. **Решение систем линейных уравнений** (СЛУ).

Рассмотрим систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. \end{cases},$$

где $a_{ij}\ \left(i=1,2,3;\ j=1,2,3\right)$ - коэффициенты при неизвестных x_j,

b_i - свободные члены в уравнениях системы.

Решением системы называется такой набор чисел $\left(x_1^0, x_2^0, x_3^0\right)$, что при их подстановке в систему вместо соответствующих неизвестных x_j $\left(\ j=1,2,3\right)$ каждое из уравнений системы обращается в тождество.

Если система имеет хотя бы одно решение, она называется ***совместной***. Система, не имеющая ни одного решения, называется ***несовместной***.

Введем обозначения:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

тогда СЛУ можно записать в ***матричной форме***: $A\cdot X=B$.

Метод Крамера решения СЛУ.

Если определитель матрицы A не равен нулю $\left(|A|\neq 0\right)$, то система имеет ***единственное решение***, которое можно найти по формулам ***Крамера***:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

$\Delta_j \ (j = 1, 2, 3)$ - вспомогательные определители, получаемые из определителя Δ заменой j - го столбца столбцом свободных членов *B*.

Вариант задания по теме:

1.1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $C = A^T - 2B$.

1.2. Дано: $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $A \cdot B$.

1.3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 6 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

1.4. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2. \end{cases}$

Методические указания к решению заданного варианта

1.1. ***Даны матрицы*** $A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ ***и*** $B=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$**.** ***Найти матрицу*** $C=A^T-2B$**.**

Решение.

Матрица A^T – транспонированная и получается из матрицы A заменой ее строк столбцами без изменения порядка их расположения, т.е. $A^T=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix}$.

Находим матрицу *2B*, умножив все элементы матрицы B на число 2: $2B=\begin{pmatrix}4 & -4\\ 2 & 8\end{pmatrix}$. Чтобы найти матрицу *C*, из элементов матрицы A^T вычитаем соответствующие элементы матрицы *2B*:

$$C=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4 & -4\\ 2 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-4 & 0-(-4)\\ 3-2 & -1-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 4\\ 1 & -9\end{pmatrix}$$

1.2. ***Дано:*** $A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & -3\\ 2 & 0 & 4\end{pmatrix}$**,** $B=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 7 & 3\\ 4 & -2\end{pmatrix}$**.** ***Найти матрицу*** $A\cdot B$**.**

Решение.

Правило умножения матриц «строка на столбец»:

$$(A\cdot B)_{2\times 2}=\begin{pmatrix}(-1)\cdot 1+(-2)\cdot 7+(-3)\cdot 4 & (-1)\cdot 5+(-2)\cdot 3+(-3)\cdot(-2)\\ 2\cdot 1+0\cdot 7+4\cdot 4 & 2\cdot 5+0\cdot 3+4\cdot(-2)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1-14-12 & -5-6+6\\ 2+0+16 & 10+0-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-27 & -5\\ 18 & 2\end{pmatrix}.$$

1.3. ***Вычислить определитель*** $\begin{vmatrix}1 & -2 & -1\\ 6 & 2 & 5\\ 0 & 3 & 4\end{vmatrix}$**.**

Решение.

Определитель третьего порядка вычисляется по выше рассмотренному правилу:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 6 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - (-2)\cdot\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + (-1)\cdot\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot(2\cdot 4 - 5\cdot 3) + 2\cdot(6\cdot 4 - 5\cdot 0) - 1\cdot(6\cdot 3 - 2\cdot 0) =$$

$$= 1\cdot(8-15) + 2\cdot(24-0) - 1\cdot(18-0) = -7 + 48 - 18 = 23.$$

1.4. ***Решить систему линейных уравнений*** $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2. \end{cases}$

<u>Решение.</u>

Решим систему методом Крамера (возможны другие методы решения).

Формулы Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},\ \text{где}$$

Δ – определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных системы уравнений;

$\Delta_j\ (j = 1, 2, 3)$ - вспомогательные определители, получаемые из определителя Δ заменой j-го столбца столбцом свободных членов *B*.

Составляем основной определитель системы Δ из коэффициентов при неизвестных и вычисляем его.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - (-4)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot(-2\cdot 5 - 4\cdot(-1)) + 4\cdot(1\cdot 5 - 4\cdot 3) + 3\cdot(1\cdot(-1) - (-2)\cdot 3) =$$

$$= 2\cdot(-10+4) + 4\cdot(5-12) + 3\cdot(-1+6) = -25$$

Составляем первый вспомогательный определитель Δ_1: первый столбец в определителе Δ заменяем столбцом свободных членов, а остальные столбцы записываем, как в определителе Δ. Вычисляем Δ_1.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - (-4) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (-2 \cdot 5 - 4 \cdot (-1)) + 4 \cdot (3 \cdot 5 - 4 \cdot 2) + 3 \cdot (3 \cdot (-1) - (-2) \cdot 2) =$$

$$= 1 \cdot (-10 + 4) + 4 \cdot (15 - 8) + 3 \cdot (-3 + 4) = 25.$$

Составляем второй вспомогательный определитель Δ_2: второй столбец в определителе Δ заменяем столбцом свободных членов, а остальные столбцы записываем, как в определителе Δ. Вычисляем Δ_2.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (3 \cdot 5 - 4 \cdot 2) - 1 \cdot (1 \cdot 5 - 4 \cdot 3) + 3 \cdot (1 \cdot 2 - 3 \cdot 3) =$$

$$2 \cdot (15 - 8) - 1 \cdot (5 - 12) + 3 \cdot (2 - 9) = 0$$

Составляем третий вспомогательный определитель Δ_3: третий столбец в определителе Δ заменяем столбцом свободных членов, а остальные столбцы записываем, как в определителе Δ. Вычисляем Δ_3.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - (-4) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (-2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1)) + 4 \cdot (1 \cdot 2 - 3 \cdot 3) + 1 \cdot (1 \cdot (-1) - (-2) \cdot 3) =$$

$$= 2 \cdot (-4 + 3) + 4 \cdot (2 - 9) + 1 \cdot (-1 + 6) = -25.$$

Тогда, по формулам Крамера, получим:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{25}{-25} = -1, \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0}{-25} = 0, \; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-25}{-25} = 1.$$

Делаем проверку:

$$\begin{cases} 2 \cdot (-1) - 4 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = -2 - 0 + 3 = 1, \\ 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 0 + 4 \cdot 1 = -1 - 0 + 4 = 3, \\ 3 \cdot (-1) - 1 \cdot 0 + 5 \cdot 1 = -3 - 0 + 5 = 2. \end{cases}$$

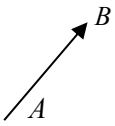
Ответ: $(-1; 0; 1)$.

2. Векторная алгебра

Справочный материал

1. Векторы. Основные понятия.

Вектор – это направленный отрезок, определяющейся длиной и направлением.



Если точка A – начало вектора, а точка B – его конец, то вектор изображается символом $\overrightarrow{AB}$ или $\vec{a}$.

Длиной или ***модулем*** вектора $\overrightarrow{AB}$ (или $\vec{a}$) называется число, равное длине отрезка, изображающего вектор и обозначается $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ (или $\left|\vec{a}\right|$). Вектор, длина которого равна нулю, называется ***нулевым*** и обозначается $\vec{0}$. Вектор, длина которого равна единице, называется ***единичным***.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются ***коллинеарными***, если они лежат на одной или на параллельных прямых. Обозначение: $\vec{a} \,||\, \vec{b}$.

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ($\vec{a} = \vec{b}$) называются ***равными***, если они: 1) коллинеарны и сонаправлены; 2) имеют равные длины.

2. Линейные операции над векторами.

Суммой двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, соединяющий начало вектора $\vec{a}$ с концом вектора $\vec{b}$ при условии, что начало вектора $\vec{b}$ совпадает с концом вектора $\vec{a}$ или $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$ (рис. 1).

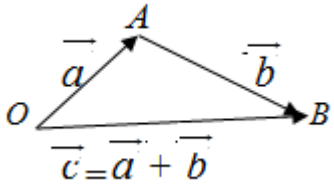


Рис. 1

Разностью двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$, который в сумме с вектором $\vec{b}$ дает вектор $\vec{a}$.

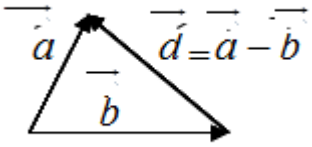


Рис. 2

Если на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (неколлинеарных), приведенных к общему началу построить параллелограмм, то одна диагональ (выходящая из их общего начала) является суммой векторов, другая – разностью (см. рис. 3).

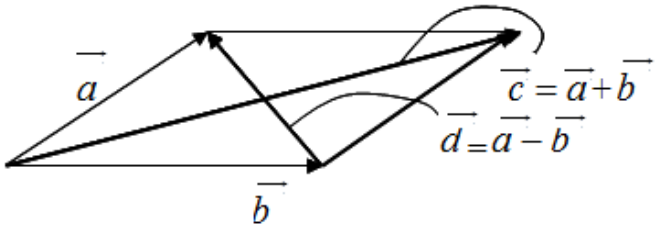


Рис. 3

Произведением вектора $\vec{a}$ ***на число*** λ $(\lambda \in R)$ называется вектор $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, удовлетворяющий условиям: 1) векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны; 2) длина вектора $\vec{b}$: $|\vec{b}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$; 3) векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены, если $\lambda > 0$ и противоположно направлены, если $\lambda < 0$.

3. Декартовы координаты вектора.

Пусть $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - единичные векторы попарно перпендикулярных осей *Ox*, *Oy*, *Oz* образуют декартов базис. ***Координатами вектора*** $\vec{a}$ в нем называются коэффициенты при базисных векторах в представлении $\vec{a}$ их линейной комбинацией:

на плоскости: $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} = (x; y)$

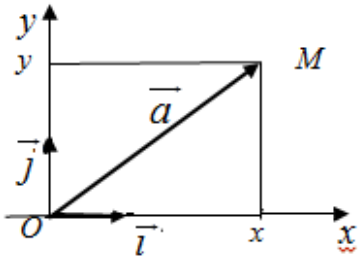


Рис. 4

в пространстве: $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x; y; z)$, где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы осей координат соответственно;

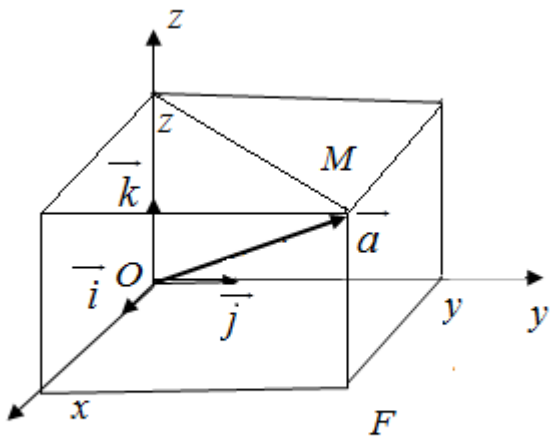


Рис. 5

Координаты суммы векторов $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$:

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2).$$

Координаты произведения вектора $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ ***на число*** λ:

$$\lambda\vec{a} = (\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1) .$$

Координаты вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, если даны точки $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

4. Длина вектора $\vec{a}$ определяется по формуле:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ (на плоскости) или}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \text{ (в пространстве).}$$

5. Проекция вектора на вектор.

Проекцией вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется число

$$np_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\alpha ,$$

где α – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

6. Скалярное произведение векторов.

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется ***число***, равное произведению длин этих векторов на косинус угла α между ними.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha .$$

Скалярное произведение векторов $\vec{a} = (x_1;\, y_1;\, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2;\, y_2;\, z_2)$, заданных координатами, выражается формулой:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

***Приложения скалярного произведения*:**

1) вычисление ***проекции*** вектора на вектор**:**

$$np_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|};$$

2) вычисление ***косинуса угла α*** между векторами**:**

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}.$$

7. Векторное произведение векторов.

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т. е. $\vec{c}\perp\vec{a}$ и $\vec{c}\perp\vec{b}$;

2) длина вектора $\vec{c}$ численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, как на сторонах (см. рис. 6), т. е.

$$|\vec{c}| = |\vec{a}\times\vec{b}| = \boldsymbol{S} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\alpha,$$

где α – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

3) вектор $\vec{c}$ направлен так, что если смотреть с его конца, то кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ кажется происходящим против часовой стрелки (*правая тройка*).

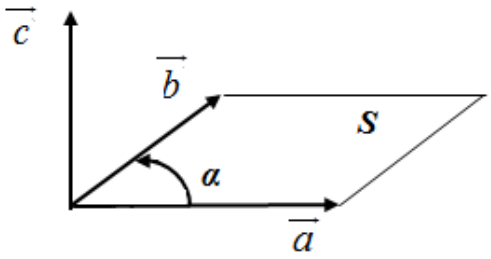


Рис. 6

Векторное произведение векторов $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, заданных координатами выражается формулой:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

***Приложения векторного произведения*:**

1) вычисление ***площади параллелограмма S*:**

$$\boldsymbol{S} = |\vec{a} \times \vec{b}|;$$

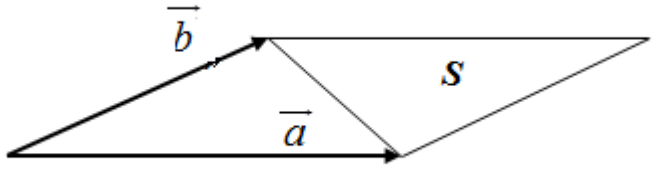


Рис. 7

2) вычисление ***площади треугольника*** S_Δ (см. рис. 7)**:**

$$S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot S = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

8. Смешанное произведение.

Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется число $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$, равное ***векторно-скалярному*** произведению $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$, т. е.

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

Смешанное произведение векторов $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ и $\vec{c} = (x_3; y_3; z_3)$, заданных координатами, можно вычислить по формуле:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

На векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ построим параллелепипед:

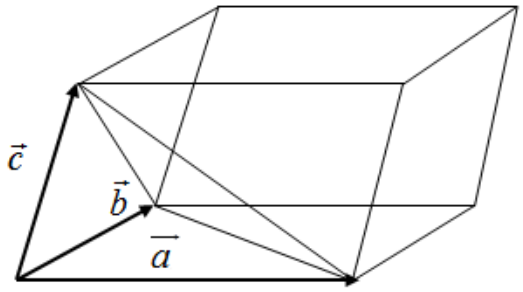


Рис. 8

Объем параллелепипеда V равен модулю смешанного произведения векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, т. е.

$$V = |\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\,|.$$

***Приложения смешанного произведения*:**

1) вычисление ***объема параллелепипеда*** V (см. рис. 8), построенного на векторах: $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$:

$$V = |\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\,|;$$

2) вычисление ***объема пирамиды*** $V_{пир}$ (см. рис. 8), построенной на векторах: $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$:

$$V_{пир} = \frac{1}{6}\cdot V = \frac{1}{6}\cdot|\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\,|.$$

Вариант задания по теме:

2.1. Найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ и его длину, если $A(2;-3;5)$, $B(-3;7;-1)$.

2.2. Даны векторы $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, где $B(2;0;1)$, $C(-3;4;2)$. Найти вектор $2\vec{a} + \vec{b}$.

2.3. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = (2;4;-1)$, $\vec{b} = (-1;0;4)$.

2.4. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = 3\sqrt{2}$, $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 1$. Найти:

а) угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$,

б) проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$.

2.5. Найти площадь треугольника ABC, если $A(0;1;2)$, $B(1;3;-1)$, $C(2;-1;2)$.

2.6. Найти объем пирамиды, построенной на векторах $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{b} = -\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$.

Методические указания к решению заданного варианта

2.1. ***Найти координаты вектора*** $\overrightarrow{AB}$ ***и его длину, если*** $A(2;-3;5)$, $B(-3;7;-1)$.

Решение.

Координатами вектора $\overrightarrow{AB}$, заданного координатами точек $A(x_1;y_1;z_1)$ - начала и $B(x_2;y_2;z_2)$ - конца вектора, являются разности соответствующих координат точек B и A, т.е.

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1;\,y_2-y_1;\,z_2-z_1).$$

Таким образом, $\overrightarrow{AB}=(-3-2;\,7-(-3);\,-1-5)=(-5;10;-6)$.

Используя формулу $|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, где $\vec{a}=(x;\,y;\,z)$, найдем длину вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(-5)^2+10^2+(-6)^2}=\sqrt{161}.$$

2.2. ***Даны векторы*** $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$, ***где*** $B(2;0;1)$, $C(-3;4;2)$. ***Найти вектор*** $2\vec{a}+\vec{b}$.

Решение.

Находим координаты вектора $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$ по координатам точек B и C, т.е. $\vec{b}=(-3-2;\,4-0;\,2-1)=(-5;\,4;\,1)$.

Вектор $\vec{a}=(3;\,-1;\,2)$. Так как при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число, то вектор $2\vec{a}=(6;\,-2;\,4)$. При сложении векторов их соответствующие координаты складываются, следовательно, вектор $2\vec{a}+\vec{b}=(6;\,-2;\,4)+(-5;\,4;\,1)=(1;\,2;\,5)$.

2.3. ***Найти скалярное произведение векторов*** $\vec{a}=(2;4;-1)$, $\vec{b}=(-1;0;4)$.

Решение.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}=(x_1;\,y_1;\,z_1)$ и $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$, заданных своими координатами, находится по формуле:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

По условию задачи $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot(-1)+4\cdot0+(-1)\cdot4=-6$.

2.4. ***Даны векторы*** $\vec{a}$ ***и*** $\vec{b}$***,*** $\vec{a}\cdot\vec{b}=3\sqrt{2}$***,*** $|\vec{a}|=6$***,*** $|\vec{b}|=1$***.***

Найти:

а) угол между векторами $\vec{a}$ ***и*** $\vec{b}$***,***

б) проекцию вектора $\vec{a}$ ***на вектор*** $\vec{b}$***.***

<u>Решение.</u>

а) Используем формулу $\cos\alpha = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$,

где α – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

По условию задачи имеем: $\cos\alpha = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \dfrac{3\sqrt{2}}{6\cdot 1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, поэтому $\alpha = 45^{\circ}$.

б) Проекция вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ находится по формуле

$$np_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

По условию задачи: $np_{\vec{b}}\vec{a} = \dfrac{3\sqrt{2}}{1} = 3\sqrt{2}$.

2.5. ***Найти площадь треугольника*** ABC***, если*** $A(0;1;2)$***,*** $B(1;3;-1)$***,*** $C(2;-1;2)$***.***

<u>Решение.</u>

Площадь треугольника можно найти по формуле:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}\cdot|\vec{a}\times\vec{b}|,$$

где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – векторы, образующие треугольник; $|\vec{a}\times\vec{b}|$ – модуль (длина) векторного произведения.

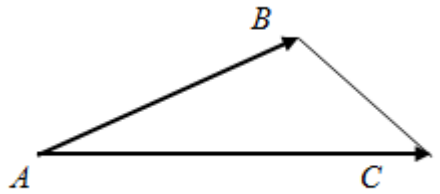


Рис.9

Векторное произведение векторов $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, заданных координатами находится по формуле:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$$

Найдем векторы $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$ (см. рис. 9) :
$\vec{a}=(1-0;3-1;-1-2)=(1;2;-3)$, $\vec{b}=(2-0;-1-1;2-2)=(2;-2;0)$.
Определим векторное произведение векторов:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & -3\\ 2 & -2 & 0\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}2 & -3\\ -2 & 0\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}1 & -3\\ 2 & 0\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -2\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}\big(0-(-2)(-3)\big)-\vec{j}\big(0-2(-3)\big)+\vec{k}\big(-2-2\cdot 2\big)=-6\vec{i}-6\vec{j}-6\vec{k}=(-6;-6;-6).$$

Длина полученного вектора $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{(-6)^2+(-6)^2+(-6)^2}=6\sqrt{3}.$

Итак, $S_{\Delta}=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\frac{1}{2}6\sqrt{3}=3\sqrt{3}$ (кв.ед.).

2.6. ***Найти объем пирамиды, построенной на векторах*** $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}$**,** $\vec{b}=-\vec{k}$**,** $\vec{c}=\vec{i}+4\vec{j}+5\vec{k}$**.**

<u>Решение.</u>

Объем пирамиды $V_{пир}$ (см. рис.8), построенной на векторах $\vec{a}=(x_1;\,y_1;\,z_1)$, $\vec{b}=(x_2;\,y_2;\,z_2)$ и $\vec{c}=(x_3;\,y_3;\,z_3)$, как на ребрах, равен $V_{пир}=\frac{1}{6}\left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right|$.

Смешанное произведение векторов, заданных своими координатами, находится по формуле: $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$.

По условию имеем: $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}=(2,3,0)$, $\vec{b}=-\vec{k}=(0;0;-1)$, $\vec{c}=\vec{i}+4\vec{j}+5\vec{k}=(1;4;5)$. Тогда их смешанное произведение равно:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 1 & 4 & 5\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}0 & -1\\ 4 & 5\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & 5\end{vmatrix}+0\begin{vmatrix}0 & 0\\ 1 & 4\end{vmatrix}=2\cdot 4-3\cdot 1+0=5.$$

Следовательно, объем пирамиды равен: $V_{пир}=\frac{1}{6}\left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right|=\frac{1}{6}\cdot 5=\frac{5}{6}$ (куб.ед.).

3. Аналитическая геометрия

Справочный материал

Линии на плоскости. Основные понятия

Аналитическая геометрия на плоскости изучает свойства геометрических объектов средствами алгебры с помощью метода координат, предложенного французским математиком Рене Декартом.

Прямая на плоскости

1. Метод координат на плоскости. Простейшие задачи.

Рассмотрим некоторые задачи аналитической геометрии в прямоугольной (декартовой) системе координат на плоскости Oxy (две взаимно перпендикулярных оси Ox и Oy с общей единицей масштаба и началом O) .

Расстояние между двумя точками.

Расстояние d между двумя точками $A\left(x_1; y_1\right)$ и $B\left(x_2; y_2\right)$ вычисляется как длина вектора $\overrightarrow{AB} = \left(x_2 - x_1; y_2 - y_1\right)$:

$$d = |AB| = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2}\ .$$

Координаты точки $C(x; y)$***, делящей отрезок с концами*** $A\left(x_1; y_1\right)$ и $B\left(x_2; y_2\right)$ ***в отношении*** $\lambda = \dfrac{AC}{CB}$ (см. рис. 1), находятся по формулам:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

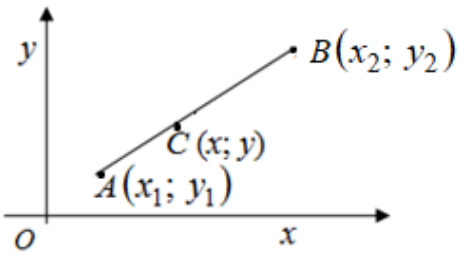


Рис 1.

Координаты точки $C(x; y)$ – ***середины отрезка с концами*** $A\left(x_1; y_1\right)$ и $B\left(x_2; y_2\right)$ находятся по формулам ($\lambda = 1$):

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

2. Уравнения прямой на плоскости.

Простейшей из линий является прямая. Разным способам задания прямой в прямоугольной системе координат на плоскости будут соответствовать разные виды ее уравнений.

• ***Уравнение прямой с угловым коэффициентом*:** $y = kx + b$, где
$k = tg\,\alpha$ – ***угловой коэффициент*** прямой;
α – *угол* ***наклона*** прямой к оси Ox;
b – ордината точки пересечения прямой с осью Ox (см. рис. 2), прямая не параллельна оси Oy.

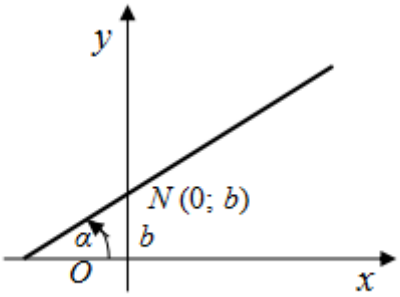


Рис. 2

• ***Общее уравнение прямой*:** $Ax + By + C = 0$ (A, B, C – любые действительные числа при условии, что A и B одновременно не равны нулю), где

вектор $\vec{n} = (A; B)$ – ***нормальный вектор*** (перпендикулярный к прямой).

Если $B \neq 0$, то угловой коэффициент прямой равен

$$k = tg\,\alpha = -\frac{A}{B}.$$

• ***Уравнение прямой, проходящей через данную точку*** $M_0(x_0; y_0)$ ***с данным угловым коэффициентом*:** $y - y_0 = k(x - x_0)$.

• ***Уравнение прямой, проходящей через две точки*** $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$: $\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$.

Отсюда, угловой коэффициент прямой $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Замечание. *Уравнение прямой на плоскости – уравнение первой степени относительно переменных x и y.*

И обратно: всякое уравнение первой степени относительно переменных x и y определяет на плоскости некоторую прямую.

3. Угол между прямыми.

Две прямые l_1 и l_2 заданы уравнениями $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$.

Угол φ между прямыми можно найти, пользуясь формулой:

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}.$$

***Условие параллельности прямых*:** $k_1 = k_2$.

***Условие перпендикулярности прямых*:** $k_1 \cdot k_2 = -1$ или $k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$.

Точка пересечения двух прямых находится из решения системы уравнений этих прямых:

$$\begin{cases} y = k_1x + b_1, \\ y = k_2x + b_2, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases}$$

Кривые второго порядка

Кривая второго порядка – линия на плоскости, задаваемая уравнением: $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$

Важнейшие типы

1. Окружность. ***Окружностью*** называется множество всех точек M $(x;\ y)$ плоскости, равноудаленных от одной точки, называемой ***центром***.

Если центр окружности – точка $C(a;b)$, радиус окружности равен R (см. рис. 3), то уравнение окружности имеет вид:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

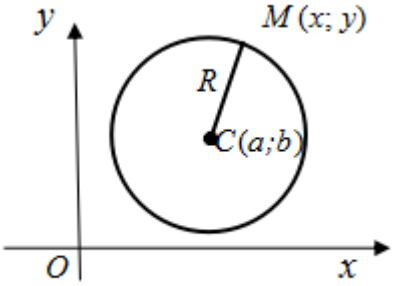


Рис. 3

Если центр окружности совпадает с началом координат, то уравнение окружности принимает вид: $x^2 + y^2 = R^2$.

2. Эллипс. ***Эллипсом*** называется множество всех точек $M(x;y)$ плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек F_1 и F_2, называемых ***фокусами***, есть величина постоянная, равная $2a > |F_1F_2|$.

Каноническое уравнение эллипса, если оси координат системы Oxy совпадают с осями симметрии эллипса (см. рис. 4), имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где a и b – полуоси эллипса, $b^2 = a^2 - c^2$,

$F_1(-c;\ 0)$, $F_2(c;\ 0)$ – *фокусы эллипса, если* $a > b$. $|F_1F_2| = 2c$.

Эксцентриситет эллипса: $\varepsilon = \frac{c}{a} < 1$.

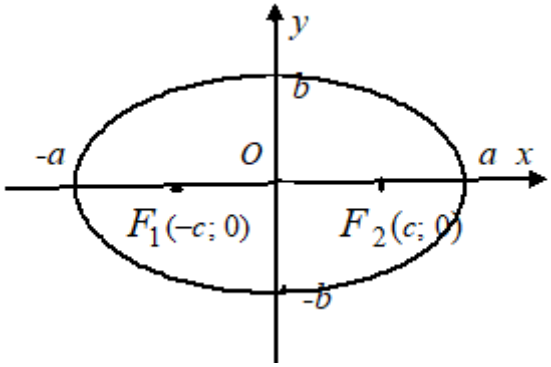


Рис. 4

3. Гипербола. ***Гиперболой*** называется множество всех точек $M(x;y)$ плоскости, модуль разности расстояний каждой из которых до двух

данных точек F_1 и F_2, называемых ***фокусами***, есть величина постоянная, равная $2a < |F_1F_2|$.

Каноническое уравнение гиперболы, если оси координат системы Oxy совпадают с осями симметрии гиперболы (см. рис. 5), имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где a – действительная полуось гиперболы,

b – мнимая полуось, $c^2 = a^2 + b^2$.

Эксцентриситетет гиперболы: $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$.

Уравнения асимптот гиперболы: $y = \pm\frac{b}{a}x$.

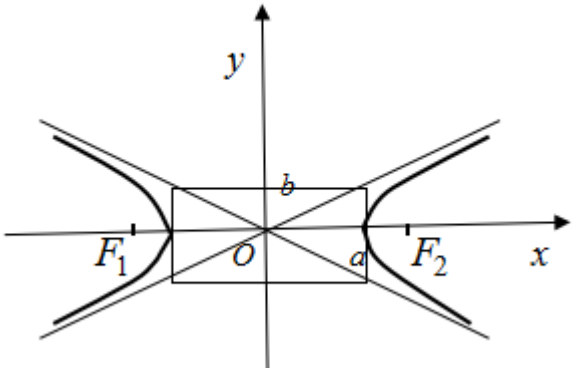


Рис.5

4. Парабола. ***Параболой*** называется множество всех точек $M(x;y)$ плоскости, каждая из которых равноудалена от данной точки F, называемой фокусом и данной прямой, называемой директрисой.

Обозначим расстояние от фокуса до директрисы p.

Каноническое уравнение параболы

$$y^2 = 2px,$$

$F\left(\frac{p}{2};0\right)$ - фокус, уравнение директрисы $x = -\frac{p}{2}$ (вершина в начале координат и ось симметрии Ox, см. рис.6):

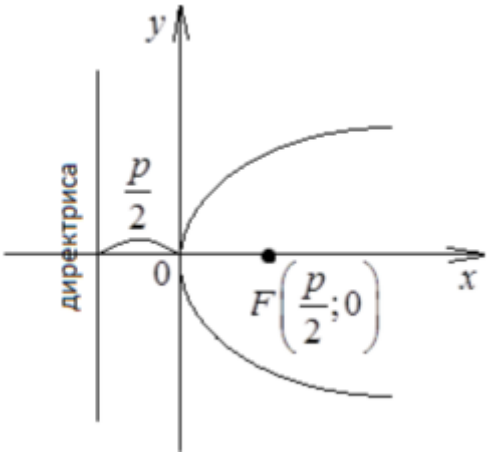


Рис 6.

Вариант задания по теме:

3.1. Найти ура внение медианы CD треугольника ABC, если заданы вершины треугольника: A (–1; –2), B (7; 0), C (2; 6).

3.2. Найти уравнение прямой, проходящей через точку A (–3; 2) параллельно прямой $2x - y - 3 = 0$.

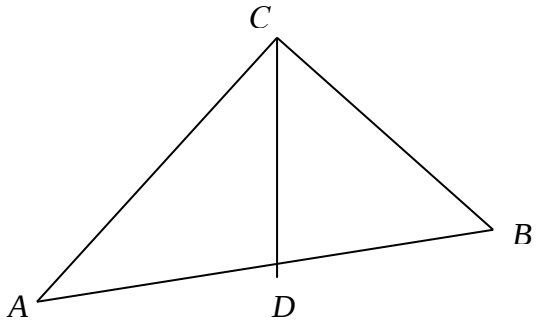
3.3. Найти уравнение окружности, проходящей через точку A (10; 5), с центром в точке C (4; –3).

3.4. Найти радиус окружности $x^2 + 10x + y^2 - 4y = 7$.

Методические указания к решению заданного варианта

3.1. ***Найти уравнение медианы CD треугольника ABC, если заданы вершины треугольника:*** A (–1; –2), B (7; 0), C (2; 6).

Решение.



Медиана CD треугольника соединяет вершину C с серединой отрезка AB. Координаты точки D (x_D; y_D), как середины отрезка, можно найти по формулам:

$$x_D = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_D = \frac{y_A + y_B}{2}, \text{ где } A(x_A; y_A) \text{ и } B(x_B; y_B).$$

По условию задачи:

$$x_D = \frac{-1+7}{2} = 3, \quad y_D = \frac{-2+0}{2} = -1. \text{ Итак, } D(3; -1).$$

Используя уравнение прямой, проходящей через две точки

$C(x_C; y_C)$ и $D(x_D; y_D)$: $\dfrac{x - x_C}{x_D - x_C} = \dfrac{y - y_C}{y_D - y_C}$,

получим $\dfrac{x-2}{3-2} = \dfrac{y-6}{-1-6}$ или $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-6}{-7}$.

Итак, уравнение медианы CD имеет вид: $7x + y - 20 = 0$.

3.2. ***Найти уравнение прямой, проходящей через точку*** A (–3; 2) ***параллельно прямой*** $2x - y - 3 = 0$.

Решение.

Уравнение прямой, имеющей *угловой коэффициент* $\boldsymbol{k}$ и проходящей через точку $A(x_0; y_0)$ имеет вид:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Угловой коэффициент прямой, заданной общим уравнением $Ax + By + C = 0$, можно найти по формуле: $k = -\dfrac{A}{B}$ (если $B \neq 0$).

По условию задачи угловой коэффициент прямой $2x - y - 3 = 0$ $k = -\dfrac{2}{-1} = 2$, а, в силу условия параллельности, угловой коэффициент искомой прямой также равен 2, и ее уравнение имеет вид:

$y - 2 = 2(x + 3)$ или $2x - y + 8 = 0$.

3.3. ***Найти уравнение окружности, проходящей через точку*** A (10; 5), ***с центром в точке*** C (4; –3).

Решение.

Если R – радиус окружности, а точка $C(a;b)$ – ее центр, то уравнение окружности имеет вид:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2.$$

По условию задачи радиус R равен длине вектора $\overrightarrow{CA}$ = (10 – 4; 5+*3*).

$R = \left|\overrightarrow{CA}\right| = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ и уравнение окружности имеет вид:

$$(x-4)^2 + (y+3)^2 = 100.$$

3.4. ***Найти радиус окружности*** $x^2 + 10x + y^2 - 4y = 7$

<u>Решение.</u>

Выделим в уравнении окружности полные квадраты относительно переменных x и y следующим образом:

$(x^2 + 10x + 25) - 25 + (y^2 - 4y + 4) - 4 = 7$ или $(x+5)^2 + (y-2)^2 = 36$.

Следовательно, радиус окружности R = 6.

4. Предел

Справочный материал

1. Основные понятия. Если каждому числу x из множества $X \subset R$ по некоторому закону поставлено в соответствие единственное число y, то говорят, что на множестве X задана *функция* $y = f(x)$.

Множество X называют *областью определения* функции, x – независимой переменной или *аргументом*.

Число A называется *пределом функции* $y = f(x)$ при $x \to x_0$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$, зависящее от ε, что для всех $x \neq x_0$ и удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, выполнится неравенство

$|f(x) - A| < \varepsilon$. Это записывается так: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Число A называется *пределом функции* $y = f(x)$ при $x \to \infty$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $M > 0$, что для всех значений x, удовлетворяющих условию $|x| > M$, выполнится неравенство

$|f(x) - A| < \varepsilon$. Это записывается так: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$.

2. Правила предельного перехода.
Если существуют: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = A$, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} g(x) = B$,то:

1.1. $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} C = C$, где C – постоянная.

1.2. $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} (f(x) + g(x)) = A + B$.

1.3. $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$.

1.4. $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$, если $B \neq 0$.

1.6. $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(u(x)) = f\,(\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} u(x))$, если оба предела существуют.

3. Если функция является непрерывной в точке $x = x_0$, то, применяя правила предельного перехода, получим, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$,

т.е. вычисление предела сводится к подстановке предельного значения аргумента в функцию под знаком предела.

4. Замечательные пределы.

Первый замечательный предел. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Формы первого замечательного предела: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{x}=k$.

Второй замечательный предел. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$ или $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

5. Пределы, используемые часто. Постоянная $a > 0$.

4.1. $\lim\limits_{x\to\infty} ax=\infty$. 4.2. $\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{a}{x}=-\infty$. 4.3. $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{a}{x}=+\infty$.

4.4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a}{x}=\infty$. 4.5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a}{x}=0$.

Вариант задания по теме: Предел

Найти следующие пределы:

4.1. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{2x^2-11x+5}$. 4.2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{\sqrt{2x+5}-\sqrt{x+7}}$.

4.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+7x^2-3}{2+8x-2x^3}$. 4.4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{x^2}$.

Методические указания к решению заданного варианта

4.1. ***Найти предел*** $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{2x^2-11x+5}$.

Решение.

Подставляя предельное значение аргумента $x = 5$ в функцию под знаком предела, убеждаемся, что числитель и знаменатель дроби обращаются в 0, и мы имеем неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Затем разлагаем числитель и знаменатель дроби на множители. Знаменатель преобразуем, используя формулу разложения квадратного трехчлена на множители: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1, x_2 - корни трехчлена.

Находим корни квадратного трехчлена:

$2x^2-11x+5=0$ и $x_1=5, x_2=0{,}5$.

Итак, $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{2x^2-11x+5}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{(x-5)(x+5)}{2(x-5)(x-0{,}5)}$.

Согласно определению предела функции аргумент x стремится к своему предельному значению 5, но никогда с ним не совпадает, т.е. $x-5\neq 0$. Сокращаем числитель и знаменатель на (x - 5) и в полученное выражение подставляем значение x = 5:

$$\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x+5)}{2(x-5)(x-0{,}5)}=\lim_{x\to 5}\frac{(x+5)}{2x-1}=\frac{10}{9}.$$

4. 2. ***Найти предел*** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{\sqrt{2x+5}-\sqrt{x+7}}$.

<u>Решение.</u>

Преобразуем числитель, разложив квадратный трехчлен на множители (корни $x_1=2,\ x_2=-3$), затем числитель и знаменатель дроби умножим на сумму ($\sqrt{2x+5}+\sqrt{x+7}>0$) и после преобразований сократим дробь на $(x-2)\neq 0$:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{\sqrt{2x+5}-\sqrt{x+7}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+3)\left(\sqrt{2x+5}+\sqrt{x+7}\right)}{\left(\sqrt{2x+5}-\sqrt{x+7}\right)\left(\sqrt{2x+5}+\sqrt{x+7}\right)}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+3)\left(\sqrt{2x+5}+\sqrt{x+7}\right)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+3)\left(\sqrt{2x+5}+\sqrt{x+7}\right)=5\cdot 6=30.$$

4.3. ***Найти предел*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+7x^2-3}{2+8x-2x^3}$.

<u>Решение.</u>

При условии $x\to\infty$ числитель и знаменатель дроби стремятся к бесконечности, и мы имеем неопределенность вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Преобразуем дробь, разделив числитель и знаменатель на x^3 (наивысшая степень x):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+7x^2-3}{2+8x-2x^3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{4x^3}{x^3}+\dfrac{7x^2}{x^3}-\dfrac{3}{x^3}}{\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{8x}{x^3}-\dfrac{2x^3}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\dfrac{7}{x}-\dfrac{3}{x^3}}{\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{8}{x^2}-2}=\frac{4}{-2}=-2,$$

так как при $x\to\infty$ функции $\dfrac{7}{x},\ \dfrac{3}{x^3},\ \dfrac{2}{x^3},\ \dfrac{8}{x^2}$ стремятся к 0

(см. п. 5 справочного материала).

4.4. ***Найти предел*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{x^2}$.

<u>Решение.</u>

При подстановке значения аргумента $x = 0$ в функцию под знаком предела числитель и знаменатель дроби обращаются в 0, и мы имеем неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

При нахождении предела используем:

1) формулу $1-\cos 2x = 2\sin^2 x$;

2) первый замечательный предел в форме $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{x} = k$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 3x}{x^2} = 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{x^2} = 2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{x}\cdot\frac{\sin 3x}{x}\right) =$$

$$= 2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{x}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{x}\right) = 2\cdot 3\cdot 3 = 18.$$

5. Производная

Справочный материал

1. Определение производной. *Производной функции* $y = f(x)$ по аргументу x называется

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

где Δx - приращение аргумента, $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ - приращение функции.

2. Правила дифференцирования. Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ - дифференцируемые функции независимой переменной x, c – постоянная, тогда справедливы следующие правила дифференцирования:

2.1. $(c)' = 0$. **2.2.** $x' = 1$.

2.3. $(u \pm v)' = u' \pm v'$. **2.4.** $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

2.5. $(cu)' = c \cdot u'$. **2.6.** $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

3. Производная сложной функции. Если $y = f(u)$, а $u = \varphi(x)$, то $y'(x) = f'(u) \cdot u'(x)$.

4. Таблица производных основных элементарных функций.

Таблица производных $u = \varphi(x)$			
1	$(u^n)' = nu^{n-1}u'$	8	$(\mathrm{ctg}\, u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
2	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$	9	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$
3	$(a^u)' = a^u (\ln a) \cdot u'$	10	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
4	$(e^u)' = e^u \cdot u'$	11	$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
5	$(\cos u)' = (-\sin u) \cdot u'$	12	$(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
6	$(\sin u)' = (\cos u) \cdot u'$	13	$(arctgu)' = \frac{u'}{1+u^2}$
7	$(tgu)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$	14	$(arcctgu)' = -\frac{u'}{1+u^2}$

Вариант задания по теме: Производная

Найти производные следующих функций:

5.1. $y = \sqrt[3]{2x^2 + 4x - 3}$. 5.2. $y = \dfrac{\cos 4x}{\sin x}$.

5.3. $y = \left(x^2 + 6\right) ctg^4 2x$. 5.4. $y = \left(2 + e^{tgx}\right)^5$.

5.5. $y = \ln \sin 3x + \arccos 7x$. 5.6. $y = arctg\left(2^{x^2+4}\right)$.

Методические указания к решению заданного варианта

5.1. ***Найти производную функции*** $y = \sqrt[3]{2x^2 + 4x - 3}$**.**

Решение.

При нахождении производной (дифференцировании) данной функции используем формулу 1 таблицы производных: $\left(u^n\right)' = n\left(u^{n-1}\right) \cdot u'$, где $u = \varphi(x)$, и правила дифференцирования:

$$y' = \left(\left(2x^2 + 4x - 3\right)^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}\left(2x^2 + 4x - 3\right)^{\frac{1}{3}-1}\left(2x^2 + 4x - 3\right)' =$$

$$= \frac{1}{3}\left(2x^2 + 4x - 3\right)^{-\frac{2}{3}}\left(2\left(x^2\right)' + 4(x)' - (3)'\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{\left(2x^2 + 4x - 3\right)^2}}(4x + 4) =$$

$$= \frac{4x + 4}{3\sqrt[3]{\left(2x^2 + 4x - 3\right)^2}}.$$

5.2. ***Найти производную функции*** $y = \dfrac{\cos 4x}{\sin x}$ **.**

Решение.

При дифференцировании данной функции применяем:

1) правило **2.6** (производная дроби), т.е. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$;

2) формулы 5 и 6 таблицы производных.

Итак, $y' = \dfrac{(\cos 4x)' \cdot \sin x - (\cos 4x) \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} =$

$$=\frac{-\sin 4x\cdot(4x)'\cdot\sin x-\cos 4x\cdot\cos x}{\sin^2 x}=\frac{-4\sin 4x\cdot\sin x-\cos 4x\cdot\cos x}{\sin^2 x}$$

5.3. ***Найти производную функции*** $y=\left(x^2+6\right)ctg^4 2x$**.**

Решение.

При нахождении производной данной функции используем:

1) правило **2.4 (**производная произведения**):** $(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$;

2) формулы 1 и 8 таблицы производных.

$$y'=\left(x^2+6\right)'\cdot ctg^4 2x+\left(x^2+6\right)\cdot(ctg^4 2x)'=$$

$$=2x\cdot ctg^4 2x+\left(x^2+6\right)\cdot 4\,ctg^3 2x\cdot\left(ctg 2x\right)'=$$

$$=2x\cdot ctg^4 2x+\left(x^2+6\right)\cdot 4\,ctg^3 2x\cdot\left(-\frac{2}{\sin^2 2x}\right)=$$

$$=2x\cdot ctg^4 2x-\frac{8\left(x^2+6\right)\,ctg^3 2x}{\sin^2 2x}.$$

5.4. ***Найти производную функции*** $y=\left(2+e^{tgx}\right)^5$

Решение.

Дифференцируя данную функцию, применяем формулы 1, 4, 7 таблицы производных.

$$y'=5\cdot\left(2+e^{tg x}\right)^4\left(2+e^{tg x}\right)'=5\cdot\left(2+e^{tg x}\right)^4\left(e^{tg x}\right)'=$$

$$=5\cdot\left(2+e^{tg x}\right)^4 e^{tg x}\left(tg\,x\right)'=5\cdot\left(2+e^{tg x}\right)^4 e^{tg x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{5\left(2+e^{tg x}\right)^4 e^{tg x}}{\cos^2 x}$$

5.5. ***Найти производную функции*** $y=\ln\sin 3x+\arccos 7x$

Решение.

При дифференцировании данной функции используем формулы 6, 10, 12 таблицы производных.

$$y'=\left(\ln\sin 3x\right)'+\left(\arccos 7x\right)'=\frac{\left(\sin 3x\right)'}{\sin 3x}-\frac{(7x)'}{\sqrt{1-(7x)^2}}=$$

$$\frac{3\cos 3x}{\sin 3x}-\frac{7}{\sqrt{1-49x^2}}.$$

5.6. ***Найти производную функции*** $y=arctg\left(2^{x^2+4}\right)$**.**

Решение.

Дифференцируя данную функцию, используем формулы 13 и 3 таблицы производных:

$$y'=\frac{\left(2^{x^2+4}\right)'}{1+\left(2^{x^2+4}\right)^2}=\frac{2^{x^2+4}\cdot\ln 2\cdot\left(x^2+4\right)'}{1+2^{2x^2+8}}=\frac{2^{x^2+4}\cdot\ln 2\cdot 2x}{1+2^{2x^2+8}}.$$

6. Исследование функций

Справочный материал

Асимптоты. Прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой к графику функции, если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ или $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Прямая с уравнением $y = kx + b$ является наклонной асимптотой к графику функции, если существуют пределы:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{и} \quad b = \lim_{x \to \infty} \left(f(x) - kx \right).$$

Достаточные условия монотонности (возрастания, убывания**) функции.** Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в некотором интервале и ее производная $y' > 0$ ($y' < 0$) во всех внутренних точках интервала, то функция *возрастает* (*убывает*) на этом интервале.

Точки экстремума (максимума, минимума**).** Точка $x = x_0$ называется точкой *максимума* (*минимума*) функции $y = f(x)$, если для всех значений

$x \neq x_0$, принадлежащих некоторой окрестности точки $x = x_0$, выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$).

Достаточные условия экстремума. Если при переходе аргумента x непрерывной функции через точку x_0 (слева направо) производная y' меняет знак с (+) на (-), то x_0 - точка максимума, если производная y' меняет знак с (-) на (+), то x_0 - точка минимума.

Функция может иметь экстремум (максимум или минимум) только в тех точках, которые находятся в области определения $y = f(x)$ и где $y' = 0$ или не существует. Эти точки называются ***критическими***.

Интервалы возрастания и убывания функции определяются из условия, что их границами могут быть только точки экстремума, точки разрыва и границы области определения.

Выпуклость, вогнутость. Точки перегиба. Кривая $y = f(x)$ называется *выпуклой* (*вогнутой*) на интервале (a; b), если она расположена *ниже* (*выше*) любой из касательных, проведенных к кривой на этом интервале.

Точки непрерывности кривой, отделяющие выпуклую часть от вогнутой части или наоборот, называются *точками перегиба*.

Достаточные условия выпуклости, вогнутости. Если функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в некотором интервале и ее вторая производная $y'' < 0$ $(y'' > 0)$ во всех внутренних точках интервала, то кривая является *выпуклой* (*вогнутой*) на этом интервале.

Абсциссы точек перегиба кривой $y = f(x)$ - значения аргумента x, при переходе через которые вторая производная y'' меняет знак.

Интервалы выпуклости, вогнутости графика функции определяются из условия, что их границами могут быть только точки перегиба, точки разрыва и границы области определения.

Исследование функций и построение их графиков удобно выполнять по следующей *схеме*:

1. Найти область определения функции и точки разрыва.
2. Исследовать четность, нечетность функции.
3. Найти асимптоты графика функции: вертикальные, наклонные.
4. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.
5. Найти точки экстремума и интервалы возрастания и убывания функции.
6. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости графика функции.
7. Построить график функции, используя полученные результаты исследования. Если их окажется недостаточно, то можно найти несколько дополнительных точек графика функции, исходя из ее уравнения.

Вариант задания по теме: Исследование функций

Исследовать функции и построить их графики:

6.1. $y = -x^3 + 6x^2 - 9x$.

6.2. $y = \dfrac{x^2}{x+1}$

Методические указания к решению заданного варианта

6.1. ***Исследовать функцию*** $y = -x^3 + 6x^2 - 9x$ ***и построить ее график.***

Решение.

1. Областью определения данной функции, как и всякого многочлена является вся числовая ось, т.е. $D(y) = (-\infty : +\infty)$. Функция всюду непрерывна, точек разрыва нет.

2. Для исследования четности или нечетности функции находим $y(-x)$:
$y(-x) = -(-x)^3 + 6(-x)^2 - 9(-x) = x^3 + 6x^2 + 9x$.

Так как $y(-x) \neq y(x)$ и $y(-x) \neq -y(x)$, то функция не является четной и не является нечетной.

3. Прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой к графику функции, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ или $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Прямая с уравнением $y = kx + b$ является наклонной асимптотой к графику функции, если существуют пределы:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{и} \quad b = \lim_{x \to \infty} \left(f(x) - kx \right).$$

В нашем случае вертикальных асимптот нет, т.к. нет точек разрыва.

Наклонных асимптот также нет, т.к.

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{-x^3 + 6x^2 - 9x}{x} = = \lim_{x \to \infty} \left(-x^2 + 6x - 9 \right) = \infty \text{ не существует.}$$

4. Находим точки пересечения графика функции с осями координат:
а) с осью Ox из условия $y = 0$, т.е. $-x^3 + 6x^2 - 9x = 0$,
$-x\left(x^2 - 6x + 9\right) = -x\left(x - 3\right)^2 = 0$ и $x_1 = 0, x_2 = 3$.
б) с осью Oy из условия $x = 0$, т.е. $y(0) = 0$.
Итак, точки пересечения с осями координат: (0; 0), (3; 0).

5. Возрастание функции в данном интервале характеризуется условием $y' > 0$, убывание - условием $y' < 0$.

Находим производную

$y' = \left(-x^3 + 6x^2 - 9x\right)' = -3x^2 + 12x - 9 = -3\left(x^2 - 4x + 3\right)$ и критические точки. Полагая $y' = 0$, получим, что $x^2 - 4x + 3 = 0$ и критические точки:

$x_1 = 1, \; x_2 = 3$.

Область определения разбиваем критическими точками на интервалы и результаты исследования поместим в таблицу:

Значения x	$(-\infty;\ 1)$	1	$(1;\ 3)$	3	$(3;\ +\infty)$
Знак y'	-	0	+	0	-
Поведение $y = f(x)$	убывает $\searrow$	min $y_{\min} = -4$	возрастает $\nearrow$	max $y_{\max} = 0$	убывает $\searrow$

Знак y' в интервалах находим, взяв значения x из данного интервала:

- в интервале $(-\infty;\ 1)$ при $x = 0$ $y'(0) = -9 < 0$;
- в интервале $(1;\ 3)$ при $x = 2$ $y'(2) = +3 > 0$;
- в интервале $(3;\ +\infty)$ при $x = 4$ $y'(4) = -9 < 0$.

В точке $x = 1$ достигается минимум функции $y_{\min} = y(1) = -4$, в точке $x = 3$ достигается максимум функции $y_{\max} = y(3) = 0$.

6. Выпуклость графика функции в данном интервале характеризуется условием $y'' < 0$, вогнутость - условием $y'' > 0$.

Находим вторую производную функции и приравниваем ее к нулю:

$$y'' = \left(y'\right)' = \left(-3x^2 + 12x - 9\right)' = -6x + 12 = 0.$$

y'' обращается в нуль при значении $x = 2$, которое может быть абсциссой точки перегиба. Результаты исследования поместим в таблицу:

Значения x	$(-\infty;\ 2)$	2	$(2;\ +\infty)$
Знак y''	+	0	-
Поведение $y = f(x)$	вогнута $\cup$	точка перегиба	выпукла $\cap$

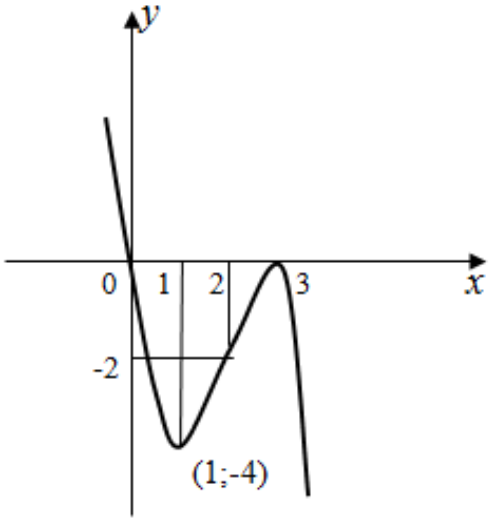
Определяем знак y'' в интервалах, взяв значения x из данного интервала:

- в интервале $(-\infty;\ 2)$ при $x = 0$ $y''(0) = 12 > 0$;
- в интервале $(2;\ +\infty)$ при $x = 3$ $y''(3) = -6 < 0$.

Вычислим $y(2) = -2^3 + 6 \cdot 2^2 - 9 \cdot 2 = -2$.

При переходе аргумента через точку $x = 2$ y'' меняет знак, следовательно, точка (2; - 2) является точкой перегиба графика функции.

7. Используя проведенное исследование, построим график функции $y = -x^3 + 6x^2 - 9x$



6.2. ***Исследовать функцию*** $y = \dfrac{x^2}{x+1}$ ***и построить ее график.***

<u>Решение.</u>

1. Область определения данной функции $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; \div\infty)$. x = - 1 – точка разрыва.

2. Область определения функции не симметрична относительно начала координат и поэтому она не является ни четной, ни нечетной.

3. Так как $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2}{x+1} = \infty$, то прямая x = - 1 является вертикальной асимптотой.

Для отыскания наклонной асимптоты $y = kx + b$ находим пределы:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x(x+1)} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{(x+1)} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{1}{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1,$$

$$b = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{-x}{x+1} = -1.$$

Таким образом, $y = x - 1$ - наклонная асимптота к графику функции.

4. Точки пересечения графика функции с осями координат:
если $x = 0$, то $y = 0$ и график функции проходит через начало координат - O (0; 0).

5. Находим интервалы монотонности, исследуем наличие точек экстремума.

$$y' = \left(\frac{x^2}{x+1}\right)' = \frac{2x(x+1)-x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2} = 0, \text{ отсюда}$$

$$x(x+2) = 0 \text{ и}$$

$x = 0$, $x = -2$ - критические точки.

Область определения разбиваем критическими точками на интервалы и результаты исследования поместим в таблицу:

Значения x	$(-\infty;\ -2)$	-2	$(-2;\ -1)$	$(-1;\ 0)$	0	$(0;\ +\infty)$
Знак y'	-	0	+	-	0	-
Поведение $y = f(x)$	возрастает ↗	max y_{max} =- 4	убывает ↘	убывает ↘	min y_{min} = 0	возрастает ↗

Знак y' в интервалах находим, взяв значения x из данного интервала:

- в интервале $(-\infty;\ -2)$ при x = - 3 y'(- 3) > 0;
- в интервале $(-2;\ -1)$ при x = - 1,5 y'(- 1,5) < 0;
- в интервале $(-1;\ 0)$ при x = - 0,5 y'(- 0,5) < 0;
- в интервале $(0;\ +\infty)$ при x = 1 y'(1) > 0.

В точке x = - 2 достигается максимум функции, $y_{max} = y(-2) = -4$,
в точке $x = 0$ достигается минимум функции, $y_{min} = y(0) = 0$.

6. Находим интервалы выпуклости и вогнутости графика функции.

$$y'' = (y')' = \left(\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}\right)' = \frac{(2x+2)(x+1)^2 - 2(x+1)(x^2+2x)}{(x+1)^4} = \frac{2}{(x+1)^3} \neq 0,$$

поэтому выпуклость и вогнутость графика функции рассмотрим на интервалах области определения.

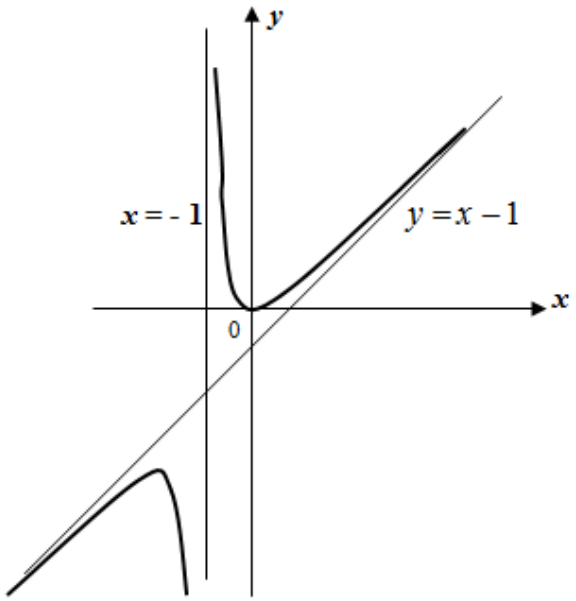
Значения x	$(-\infty;\ -1)$	$(-1;\ +\infty)$
Знак y''	-	+
Поведение $y = f(x)$	выпукла ∩	вогнута ∪

Определяем знак y'' в интервалах, взяв значения x из данного интервала:

- в интервале $(-\infty;\ -1)$ при x = - 2 y''(- 2) < 0;
- в интервале $(-1;\ +\infty)$ при $x = 0$ $y''(0) > 0$.

Точек перегиба график функции не имеет.

7. Построим график функции, используя проведенное исследование.



7. Интегралы

Справочный материал

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1. Определение неопределенного интеграла. Функция $F(x)$ называется ***первообразной*** для функции $f(x)$ на промежутке X, если в каждой точке этого промежутка выполняется равенство $F'(x) = f(x)$ (или $dF(x) = f(x)dx$).

Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на промежутке X называется ***неопределенным интегралом*** от функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)\,dx$: $\int f(x)\,dx = F(x) + C$,

где $F(x)$ – какая-либо первообразная для $f(x)$, а C – произвольная постоянная.

2.Свойства неопределенного интеграла:

2.1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.

2.2. $\int k\, f(x)dx = k\int f(x)\,dx$ (k - постоянная).

2.3. $\int (f(x) \pm \varphi(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int \varphi(x)\,dx$.

3. Таблица основных интегралов:

1	$\int dx = x + C$	8	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
2	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$	9	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
3	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	10	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$
4	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	11	$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$
5	$\int e^x dx = e^x + C$	12	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$
6	$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$	13	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert + C$
7	$\int \cos x\, dx = \sin x + C$	14	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\lvert \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right\rvert + C$

4. Основные методы интегрирования.

Метод непосредственного интегрирования – метод вычисления интеграла приведением к табличным интегралам с использованием тождественных преобразований подынтегрального выражения и свойств неопределенного интеграла.

Метод замены переменной. Пусть справедлива формула:

$\int f(x)dx = F(x) + C$. Заменим переменную x новой переменной t по формуле $x = \varphi(t)$ ($x = \varphi(t)$ – дифференцируемая функция, имеющая обратную), тогда $dx = \varphi'(t)dt$ и $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Метод интегрирования по частям. Этот метод применим, если подынтегральное выражение можно представить в виде: $f(x)dx = u(x)v'(x)dx = u\,dv$ и тогда справедлива формула:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Использование метода целесообразно, если $\int v\,du$ является более простым, чем исходный интеграл.

Метод интегрирования по частям применяют к интегралам следующих типов ($P(x)$ – многочлен):

1. $\int P(x)\,e^{ax}dx$, $\int P(x)\sin ax\,dx$, $\int P(x)\cos ax\,dx$.

Здесь $u = P(x)$, и, соответственно интегралам:

$$dv = e^{ax}dx,\ \ dv = \sin ax\,dx,\ \ dv = \cos ax\,dx.$$

2. $\int P(x)\ln x\,dx$, $\int P(x)\arcsin x\,dx$, $\int P(x)\,arctg\,x\,dx$.

Здесь за u принимаются соответственно функции $\ln x$, $\arcsin x$, $\mathrm{arctg}\,x$, $dv = P(x)dx$.

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

4. **Определение определенного интеграла.** ***Определенным интегралом*** от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ называется предел интегральных сумм $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ (n – число отрезков деления $[a;b]$ на частичные точками x_i ; c_i - произвольная точка из $[x_{i-1}; x_i]$, $\Delta x_i = |x_i - x_{i-1}|$):

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i,$$

a – нижний, b – верхний пределы интегрирования.

6. Свойства определенного интеграла.

6.1. $\int_a^a f(x)dx = 0$. 6.2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

6.3. $\int_a^b c \cdot f(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$, где c – постоянная.

6.4. $\int_a^b (f(x)+\varphi(x))dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b \varphi(x)dx$.

6.5. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, где точка $x=c$ может находиться как внутри, так и вне отрезка $[a;b]$.

6.6. $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ ($\int_a^b f(x)dx \leq 0$), если $f(x) \geq 0$ ($f(x) \leq 0$) на отрезке $[a;b]$.

7. Правила вычисления определенных интегралов.

***Формула Ньютона-Лейбница*:**

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ - первообразная для $f(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)$.

***Замена переменной*:** $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)dt$,

где $x=\varphi(t)$ – функция, непрерывная вместе с производной $\varphi'(t)$ на отрезке $\alpha \leq t \leq \beta$, $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$.

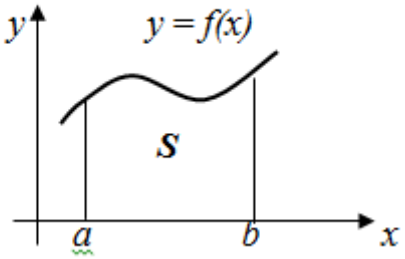
***Интегрирование по частям*:**

$$\int_a^b u\,dv = u\,v|_a^b - \int_a^b v\,du.$$

8. Геометрический смысл определенного интеграла.

Если $f(x) \geq 0$ на отрезке $[a; b]$, то определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ равен площади криволинейной трапеции – фигуры, ограниченной линиями: $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$, т.е.

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$



Вариант задания по теме: Интегралы

Найти неопределенные интегралы:

7.1. $\int (2x^3 - 5x^2 + 7x - 3)dx$.

7.2. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x-4}}$.

7.3. $\int (x-5)\cos 2x\, dx$.

7.4. $\int \sin 2x \cdot \cos 5x\, dx$.

7.5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = -x^2 + 5x - 4$, $y = 0$.

Методические указания к решению заданного варианта

7.1. ***Найти интеграл*** $\int (2x^3 - 5x^2 + 7x - 3)dx$**.**

Решение.

Используя свойства 2.2 и 2.3 неопределенного интеграла, получим $\int (2x^3 - 5x^2 + 7x - 3)dx = 2\int x^3 dx - 5\int x^2 dx + 7\int x dx - 3\int dx$.

К первым трем интегралам применяем формулу 2 таблицы интегралов, к четвертому - формулу 1.

$$\int\left(2x^3-5x^2+7x-3\right)dx = 2\frac{x^4}{4}-5\frac{x^3}{3}+7\frac{x^2}{2}-3x+C =$$

$$=\frac{x^4}{2}-\frac{5x^3}{3}+\frac{7x^2}{2}-3x+C.$$

7.2. ***Найти интеграл*** $\int\frac{dx}{\sqrt{3x-4}}$.

Решение.

Применяя метод замены переменной, сведем данный интеграл к табличному. Полагая $t = 3x - 4$, получим $dt = (3x-4)'\,dx = 3\,dx$, $dx = \frac{dt}{3}$.

Затем используем формулу 2 таблицы интегралов.

Итак, $\int\frac{dx}{\sqrt{3x-4}} = \int\frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\int t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{3}\cdot\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}}+C = \frac{2}{3}\sqrt{t}+C$.

Далее, возвращаясь к старой переменной, имеем

$$\int\frac{dx}{\sqrt{3x-4}} = \frac{2}{3}\sqrt{3x-4}+C.$$

7.3. ***Найти интеграл*** $\int(x-5)\cos 2x\,dx$.

Решение.

Здесь нужно применить метод интегрирования по частям с использованием формулы: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$.

Полагая $u = x-5$ и $dv = \cos 2x\,dx$, получим $du = (x-5)'\,dx = dx$, $v = \int dv = \int\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\sin 2x$ (сделав замену переменной $t = 2x$ и $dt = 2\,dx$).

Находим $\int(x-5)\cos 2x\,dx = (x-5)\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\int\sin 2x\,dx =$

$$=(x-5)\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

7.4. ***Найти интеграл*** $\int\sin 2x\cdot\cos 5x\,dx$.

Решение.

Преобразуем функцию под знаком интеграла, используя формулу тригонометрии: $\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$.

Итак, $\int \sin 2x\cdot\cos 5x\,dx = \frac{1}{2}\int[\sin 7x+\sin(-3x)]\,dx = \frac{1}{2}\int \sin 7x\,dx -$

$-\frac{1}{2}\int \sin 3x\,dx = -\frac{1}{2\cdot 7}\cos 7x + \frac{1}{2\cdot 3}\cos 3x + C = = -\frac{1}{14}\cos 7x + \frac{1}{6}\cos 3x + C$.

Напомним другие формулы тригонометрии, позволяющие представить произведение тригонометрических функций в виде суммы:

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)],$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)].$$

Решение следующей задачи требует умения вычислять определенные интегралы.

Пример: вычислить $\int_1^2\left(3x^3-5x+\frac{7}{x}\right)dx$.

<u>Решение.</u>

Используя свойства определенного интеграла, получим

$$\int_1^2\left(3x^3-5x+\frac{7}{x}\right)dx = 3\int_1^2 x^3dx - 5\int_1^2 x\,dx + 7\int_1^2\frac{dx}{x}.$$

Все интегралы – табличные. Применяя формулу ***Ньютона-Лейбница***

($\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b)-F(a)$, $F(x)$ - первообразная для $f(x)$),

имеем:

$$\int_1^2\left(3x^3-5x+\frac{7}{x}\right)dx = 3\int_1^2 x^3dx - 5\int_1^2 x\,dx + 7\int_1^2\frac{dx}{x} = 3\,\frac{x^4}{4}|_1^2 - 5\frac{x^2}{2}|_1^2 + 7\ln|x||_1^2$$

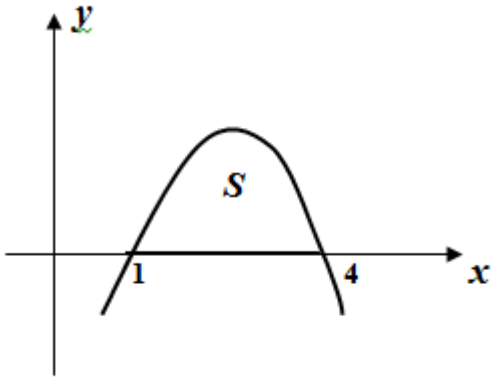
$$= \frac{3}{4}(16-1)-\frac{5}{2}(4-1)+7(\ln 2-\ln 1) = 3{,}75+\ln 2.$$

7.5. ***Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:***
$y=-x^2+5x-4$, $y = 0$.

<u>Решение.</u>

Приступая к решению, используем геометрический смысл определенного интеграла и строим фигуру, ограниченную заданными линиями: $y = -x^2 + 5x - 4$, $y = 0$. Находим точки пересечения этих линий: $y = -x^2 + 5x - 4 = 0$.

Решая квадратное уравнение, получим $x_1 = 1$, $x_2 = 4$. Фигура ограничена сверху параболой ($y = -x^2 + 5x - 4$), снизу осью x ($y = 0$).



Площадь полученной фигуры $S = \int_1^4 \left(-x^2 + 5x - 4\right)dx =$

$$= -\frac{x^3}{3}\Big|_1^4 + \frac{5x^2}{2}\Big|_1^4 - 4x\Big|_1^4 = \left(-\frac{64}{3} + \frac{1}{3}\right) + (40 - 2{,}5) - (16 - 4) = 4{,}5.$$

8. Дифференциальные уравнения

Справочный материал

1. Основные понятия.

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию y и ее производные

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0,$$

или $y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ - разрешенное относительно производной.

Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок производной, входящей в уравнение.

Решением (или *интегралом*) дифференциального уравнения называется дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$ **,** которая при подстановке ее вместе со своими производными в уравнение, обращает его в тождество.

2. Дифференциальные уравнения первого порядка. *Дифференциальное уравнение первого порядка* - уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0 \text{ или } y' = f(x, y).$$

Принимая во внимание, что $y' = \dfrac{dy}{dx}$**,** уравнение можно представить в виде $dy = f(x, y)dx$.

Общее решение дифференциального уравнения первого порядка - это функция вида $y = \varphi(x, C)$ **(**C – произвольная постоянная), удовлетворяющая условиям: *а*) при любом значении C является решением уравнения;

б) при любом начальном условии (допустимом) $y(x_0) = y_0$ найдется такое значение $C = C_0$, что $y_0 = \varphi(x_0, C_0)$.

Общее решение, представленное в неявной форме $g(x, y, C) = 0$ называется *общим интегралом*

Частное решение (*интеграл*) получается из общего при конкретном значении произвольной постоянной C.

2.1. ***Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными***

имеет вид $f_1(x) f_2(y)dx + \varphi_1(x)\varphi_2(y)dy = 0$, решается преобразованием его к виду $P(y)dy = Q(x)dx$ и почленным интегрированием этого равенства.

2.2. ***Однородное дифференциальное уравнение*** - дифференциальное уравнение, приводимое к виду $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$. Подстановка $t = \frac{y}{x}$ или $y = t \cdot x$ ($y' = t'x + t$) сводит однородное уравнение к уравнению с разделяющимися переменными.

2.3. ***Линейное дифференциальное уравнение*** - дифференциальное уравнение, приводимое к виду $y' + P(x)y = Q(x)$, решается с помощью подстановки: $y = u(x) \cdot v(x)$, $y' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. Эта подстановка сводит решение уравнения к двум уравнениям с разделяющимися переменными.

Вариант задания по теме: Дифференциальные уравнения

Решить дифференциальные уравнения:

8.1. $\left(\sqrt{y} + 1\right)\sqrt{x} \cdot y' - y = 0$.

8.2. $2xy\,y' = \left(x^2 + y^2\right)$.

8.3. $y' + \frac{y}{x+1} = x^2$.

Методические указания к решению заданного варианта

8.1. ***Решить дифференциальное уравнение*** $\left(\sqrt{y} + 1\right)\sqrt{x} \cdot y' - y = 0$.

<u>Решение.</u>

Выразим производную через дифференциалы переменных: $y' = \frac{dy}{dx}$,

$$\left(\sqrt{y} + 1\right)\sqrt{x} \cdot \frac{dy}{dx} - y = 0.$$

Умножим обе части уравнения на dx, приводим его к виду $\left(\sqrt{y} + 1\right)\sqrt{x} \cdot dy = y\,dx$ и устанавливаем, что это *уравнение с разделяющимися переменными*.

Далее разделяем переменные:

$$\frac{\sqrt{y}+1}{y}dy=\frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

и, интегрируя, находим общий интеграл

$$\int\left(y^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{y}\right)dy=\int x^{-\frac{1}{2}}dx;\quad \int y^{-\frac{1}{2}}dy+\int\frac{dy}{y}=\int x^{-\frac{1}{2}}dx;$$

$$\frac{y^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+\ln|y|=\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C;\quad 2\sqrt{y}+\ln|y|-2\sqrt{x}=C.$$

8.2. ***Решить дифференциальное уравнение*** $2xy\,y'=\left(x^2+y^2\right)$.

<u>Решение.</u>

Выразим производную из уравнения: $y'=\dfrac{x^2+y^2}{2xy}$.

Разделив числитель и знаменатель дроби на x^2, получим

$$y'=\frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\frac{y}{x}}$$

и устанавливаем, что уравнение является о*днородным*.

Далее полагая $y=t\cdot x$ и $y'=t'x+t$, преобразуем уравнение к виду

$$t'x+t=\frac{1+t^2}{2t};\quad t'x=\frac{1+t^2}{2t}-t;\quad t'x=\frac{1-t^2}{2t};$$

$$\frac{dt}{dx}x=\frac{1-t^2}{2t}$$ (*уравнение с разделяющимися переменными*).

Разделим переменные: $\dfrac{2t\,dt}{1-t^2}=\dfrac{dx}{x}$ и, интегрируя $\displaystyle\int\frac{2t\,dt}{1-t^2}=\int\frac{dx}{x}$,

найдем

$$-\ln\left|1-t^2\right|=\ln|x|-\ln C\quad\left(\ln\left|1-t^2\right|+\ln|x|=\ln C\right)\text{ или}$$

$$x\left(1-t^2\right)=C.$$

Далее заменяя $t=\dfrac{y}{x}$, получим $x\left(1-\dfrac{y^2}{x^2}\right)=C$ и, окончательно,

$x^2-y^2=Cx$.

8.3. ***Решить дифференциальное уравнение*** $y' + \dfrac{y}{x+1} = x^2$.

Решение.

Данное дифференциальное уравнение является *линейным*, поэтому применяем подстановку $y = uv$, тогда $y' = u'v + uv'$ и уравнение примет вид

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x+1} = x^2 \text{ или } u'v + u\left(v' + \frac{v}{x+1}\right) = x^2.$$

Функцию $v = v(x)$ подберем так, чтобы она являлась решением уравнения $v' + \dfrac{v}{x+1} = 0$.

Тогда $u = u(x)$ - решение уравнения $u'v = x^2$ (*).

Решаем $v' + \dfrac{v}{x+1} = 0$ как уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dv}{dx} + \frac{v}{x+1} = 0, \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x+1}.$$

Выполняя интегрирование $\int \dfrac{dv}{v} = -\int \dfrac{dx}{x+1}$, и полагая C=0, получим

$$\ln|v| = -\ln|x+1| \text{ и } v = \frac{1}{x+1}.$$

Подставляя найденную функцию v в уравнение (*), имеем

$\dfrac{du}{dx} \cdot \dfrac{1}{x+1} = x^2$ (уравнение с разделяющимися переменными) или

$$du = \left(x^3 + x^2\right)dx.$$

В результате интегрирования последнего равенства функция

$$u = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + C.$$

Таким образом, решение исходного уравнения имеет вид:

$$y = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + C\right)\frac{1}{x+1}.$$

II. Варианты контрольных работ, правила оформления

Образец титульного листа индивидуальной домашней контрольной обучающегося ИЗО

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Уральский государственный лесотехнический университет»
Институт заочного обучения

Контрольная работа, семестр № _____
Вариант №_____

_____
(Ф.И.О. обучающегося)
академической группы _____ номер зачетки _____

Проверил:
_____
(должность, Ф.И.О.)

Результат рецензирования контрольной работы:
_____
_____

«____» _____ 20 __ г. _____/ _____
(подпись) (расшифровка подписи)
Екатеринбург, 20__ г.

Контрольные задания (1 семестр)

Вариант 1

1. Линейная алгебра

1.1 Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$. Найти матрицу $C=A-2B$

1.2. Дано $A=\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 0 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Найти матрицу $A\cdot B$

1.3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}1 & 3 & -2\\ 6 & -2 & 1\\ 0 & 4 & -1\end{vmatrix}$.

1. 4. Решить систему уравнений $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=4,\\ 2x_1-3x_2+4x_3=-4,\\ 5x_1-7x_2+8x_3=-7.\end{cases}$

2. Векторная алгебра

2.1. Найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ и его длину, если $A(1;-4;-3)$, $B(2;5;-4)$.

2.2. Даны векторы $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{k}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$, $B(1;5;0)$ $C(2;3;1)$. Найти вектор $2\vec{a}-\vec{b}$.

2.3. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}=(1;0;2)$ и $\vec{b}=(2;3;-1)$.

2.4. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\sqrt{2}$, $|\vec{a}|=0,5$, $|\vec{b}|=8$.

2.5. Найти площадь треугольника ABC, если $A(1;-2;8)$, $B(0;0;4)$ и $C(6;2;0)$.

2.6. Найти объем пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}=6\vec{i}+2\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{k}$ и $\vec{c}=2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$.

3. Аналитическая геометрия

3.1. Найти уравнение медианы CD треугольника ABC, если вершины имеют координаты: $A(-1; -1)$, $B(3; -1)$, $C(1; 3)$.

3.2. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(-1; -1)$ параллельно прямой $2x - y - 3 = 0$.

3.3. Указать уравнение окружности, которая проходит через точку $A(10;7)$ с центром в точке $C(2;1)$.

3.4. Найти радиус окружности $x^2 - 6x + y^2 + 2y = 6$.

Вариант 2

1. Линейная алгебра

1.1. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 4 & -1\end{pmatrix}$. Найти матрицу $C=2A-B$.

1.2. Дано $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 7\\ 3 & 4\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Найти матрицу $A\cdot B$.

1.3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}-1 & 2 & -2\\ 3 & 4 & -2\\ 1 & 0 & 7\end{vmatrix}$.

1.4. Решить систему уравнений $\begin{cases}2x_1-x_2+x_3=2,\\ 3x_1+2x_2+2x_3=-2,\\ x_1-2x_2+x_3=1.\end{cases}$

2. Векторная алгебра

2.1 Найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ и его длину, если $A(1;0;-5)$, $B(-2;3;-4)$.

2.2. Даны векторы $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, где $A(1;4;2)$, $B(4;-4;1)$, и $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{k}$. Найти вектор $2\vec{a}-2\vec{b}$.

2.3. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}|=0,5$, $|\vec{b}|=12$, и угол между ними 60°.

2.4. Найти косинус угла между векторами $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}+5\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}-5\vec{k}$.

2.5. Найти векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, где $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $A(1;-2;4)$, $B(3;0;1)$ и $\vec{b}=(1;0;3)$.

2.6. Найти объём параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}=3\bar{i}+\bar{j}-2\bar{k}$, $\bar{b}=-\bar{i}+4\bar{j}+2\bar{k}$, $\bar{c}=2\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k}$.

3. Аналитическая геометрия

3.1. Найти уравнение медианы CD треугольника ABC, если вершины имеют координаты: A(-2; -1), B(8; 3), C(4; 3).

3.2. Найти уравнение прямой, проходящей через точку A(-2; -1), перпендикулярно прямой $x-2y+4=0$.

3.3. Указать уравнение окружности, которая проходит через точку A(12;5) с центром в точке C(4;-1).

3.4. Найти радиус окружности $x^2-8x+y^2-2y=8$.

Вариант 3

1. Линейная алгебра

1.1. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $C=B^T-2A$.

1.2. Дано $A=\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $A\cdot B$.

1.3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$.

1.4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=5, \\ 2x_1-x_2-x_3=1, \\ x_1+3x_2+4x_3=6. \end{cases}$

2. Векторная алгебра

2.1. Найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ и его длину, если $A(-1;\,2;\,6)$, $B(-2;\,0;\,8)$.

2.2.Даны векторы $\vec{a}=\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$, $B(2;-3;-1)$ $C(2;-4;1)$. Найти вектор $\vec{a}+\vec{b}$.

2.3. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $A(2;1;-1)$, $B(3;0;1)$ и $\vec{b}=(2;3;-1)$.

2.4. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}\cdot\vec{b}=1$, $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$.

2.5. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, где $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$ и $\vec{b}=(1;0;3)$.

2.6. Найти объём параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{b}=4\vec{i}-\vec{j}-4\vec{k}$, $\vec{c}=3\vec{i}-3\vec{j}$.

3. Аналитическая геометрия

3.1. Найти уравнение медианы CD треугольника ABC, если вершины имеют координаты: $A(1;\,-1)$, $B(-3;\,-5)$, $C(2;\,6)$

3.2. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(1;\,-1)$, параллельно прямой $2x-y+1=0$.

3.3. Указать уравнение окружности, которая проходит через точку $A(7;11)$ с центром в точке $C(1;3)$.

3.4. Найти радиус окружности $x^2+4x+y^2+6y=3$.

Вариант 4

1. Линейная алгебра

1.1. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $C=B+2A$.

1.2. Дано $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $A\cdot B$.

1.3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$.

1.4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=6, \\ 2x_1+3x_2-4x_3=20, \\ 3x_1-2x_2-5x_3=6. \end{cases}$

2. Векторная алгебра

2.1. Найти координаты вектора $\overrightarrow{MN}$ и его длину, если $M(6;-2;3)$, $N(3;-5;2)$.

2.2. Даны векторы $\vec{a}=\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$, $B(2;3;-1)$ $C(1;-1;0)$ Найти вектор $\vec{a}+\overrightarrow{2b}$.

2.3. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=\sqrt{3}$, и угол между ними 30°.

2.4. Найти косинус угла между векторами $\vec{a}=(2;-4;1)$ и $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}-5\vec{k}$.

2.5. Найти векторное произведение векторов $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$.

2.6. Найти объём пирамиды, построенной на векторах $\bar{a}=3\bar{i}-3\bar{j}-2\bar{k}$, $\bar{b}=-\bar{i}-4\bar{j}+2\bar{k}$, $\bar{c}=2\bar{i}+2\bar{k}$.

3. Аналитическая геометрия

3.1. Найти уравнение медианы CD треугольника ABC, если вершины имеют координаты: A(-4; 4), B(0; 0), C(1; 5).

3.2. Найти уравнение прямой, проходящей через точку A(-4; 4), перпендикулярно прямой $3x + y + 5=0$.

3.3. Указать уравнение окружности, которая проходит через точку A(2;6) с центром в точке C(-1;2).

3.4. Найти радиус окружности $x^2-2x+y^2-6y=6$.

Вариант 5

1. Линейная алгебра

1.1. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$. Найти матрицу $C=A+2B^T$

1.2. Дано $A=\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 1 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. Найти матрицу $A\cdot B$

1.3.Вычислить определитель $\begin{vmatrix}1 & 4 & 3\\ 5 & -2 & 1\\ 0 & 4 & -1\end{vmatrix}$.

1.4. Решить систему уравнений $\begin{cases}8x_1+3x_2-6x_3=2,\\ x_1+x_2-x_3=1,\\ -4x_1-x_2+3x_3=-2.\end{cases}$

2. Векторная алгебра

2.1. Найти координаты вектора $\overrightarrow{MN}$ и его длину, если $M(2;5;-4)$, $N(2;1;-7)$.

2.2. Даны векторы $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, где $A(2;1;0)$, $B(4;-4;1)$, и $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{k}$. Найти вектор $\vec{a}-2\vec{b}$.

2.3. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $A(1;0;-2)$, $B(3;2;1)$ и $\vec{b}=(2;3;-1)$.

2.4. Найдите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{2}$, $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$.

2.5. Найти векторное произведение векторов $\vec{a}=5\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=-\vec{i}+5\vec{j}-3\vec{k}$.

2.6. Найти объём параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}=-5\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=-2\vec{i}+4\vec{j}-7\vec{k}$, $\vec{c}=3\vec{i}+5\vec{k}$.

3. Аналитическая геометрия

3.1. Найти уравнение медианы CD треугольника ABC, если вершины имеют координаты: $A(10;-2)$, $B(0;-8)$, $C(0;-3)$.

3.2. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(7;-1)$, параллельно прямой $5x+y+1=0$.

3.3. Указать уравнение окружности, которая проходит через точку $A(4;2)$ с центром в точке $C(1;-2)$.

3.4. Найти радиус окружности $x^2+2x+y^2-4y=4$.

Вариант 6

1. Линейная алгебра

1.1. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}1 & 5\\ -4 & 1\end{pmatrix}$. Найти матрицу $C=3A+B$.

1.2. Дано $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 4 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Найти матрицу $A\cdot B$.

1.3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}-1 & 1 & -2\\ -3 & 4 & 2\\ 5 & 0 & 0\end{vmatrix}$.

1.4. Решить систему уравнений $\begin{cases}2x_1+x_2+x_3=2,\\ 5x_1+x_2+3x_3=14,\\ 2x_1+x_2+2x_3=5.\end{cases}$

2. Векторная алгебра

2.1. Найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ и его длину, если $A(0;5;-3)$, $B(2;\ 6;-4)$.

2.2. Даны векторы $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$, $B(2;-3;-1)$ $C(1;1;0)$ Найти вектор $2\vec{a}+\vec{b}$.

2.3. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=\sqrt{2}$, и угол между ними 45°.

2.4. Найти косинус угла между векторами $\vec{a}=(2;-1;0)$ и $\vec{b}=3\vec{i}+\vec{j}-5\vec{k}$.

2.5. Найти векторное произведение векторов $\vec{a}=2\vec{i}-4\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=5\vec{i}+3\vec{j}+6\vec{k}$.

2.6. Найти объём пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}=3\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}=5\vec{i}+4\vec{j}+8\vec{k}$, $\vec{c}=-\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$.

3. Аналитическая геометрия

3.1. Найти уравнение медианы CD треугольника ABC, если вершины имеют координаты: A(7; -1), B(3; 11), C(-5; 3).

3.2. Найти уравнение прямой, проходящей через точку A(-2; -13), перпендикулярно прямой $6x+y-2=0$.

3.3. Указать уравнение окружности, которая проходит через точку A(7;2) с центром в точке C(3;-1).

3.4. Найти радиус окружности $x^2-4x+y^2-2y=4$.

Вариант 7

1. Линейная алгебра

1.1. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $C=B+2A$.

1.2. Дано $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $A\cdot B$.

1.3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 7 \end{vmatrix}$.

1.4. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 8, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

2. Векторная алгебра

2.1. Найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ и его длину, если $A(8;\,4;\,-1)$, $B(5;\,-1;\,-3)$.

2.2. Даны векторы $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$, $B(2;0;-1)$ $C(4;1;1)$. Найти вектор $3\vec{a}-\vec{b}$.

2.3. Найти скалярное произведение векторов $\bar{a}=3\bar{i}+2\bar{j}+\bar{k}$, $\bar{b}=4\bar{i}+3\bar{j}-6\bar{k}$

2.4. Найти косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}\cdot\vec{b}=5$, $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=4$.

2.5. Найти векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $A(1;-2;3)$, $B(0;-1;2)$, $\vec{b}=-\vec{i}+5\vec{j}-3\vec{k}$.

2.6. Найти объём пирамиды, построенной на векторах $\bar{a}=3\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k}$, $\bar{b}=-3\bar{i}-4\bar{j}$, $\bar{c}=-\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}$.

3. Аналитическая геометрия

3.1. Найти уравнение медианы CD треугольника ABC, если вершины имеют координаты: A(-2; -13), B(4; -1), C(5; 4).

3.2. Найти уравнение прямой, проходящей через точку A(1; -9), параллельно прямой $4x+2y+10=0$.

3.3. Указать уравнение окружности, которая проходит через точку A(2;6) с центром в точке C(-2;3).

3.4. Найти радиус окружности $x^2+6x+y^2+2y=6$.

Вариант 8

1. Линейная алгебра

1.1. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 5\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$. Найти матрицу $C=B^T+2A$.

1.2. Дано $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 5\\ 0 & 1 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 7\\ -3 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Найти матрицу $A\cdot B$.

1.3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}1 & 2 & -5\\ 3 & 1 & 4\\ 3 & 0 & -1\end{vmatrix}$.

1.4. Решить систему уравнений $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1,\\ x_1-x_2+2x_3=-5,\\ 4x_1+x_2+4x_3=-2.\end{cases}$

2. Векторная алгебра

2.1. Найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ и его длину, если $A(9;\,0;-2)$, $B(7;\,-1;-5)$.

2.2. Даны векторы $\vec{a}=(3;1;-2)$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$, $B(2;-3;-1)$ $C(2;-3;0)$. Найти вектор $\vec{a}-\vec{b}$.

2.3. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=3$ и угол между ними 60°.

2.4. Найти косинус угла между векторами $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$ и $\vec{b}=(1;2;0)$.

2.5. Найти векторное произведение векторов $\vec{a}=\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}$.

2.6. Найти объём пирамиды, построенной на векторах $\bar{a}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$, $\bar{b}=4\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k}$, $\vec{c}=\vec{i}-3\bar{j}$.

3. Аналитическая геометрия

3.1. Найти уравнение медианы CD треугольника ABC, если вершины имеют координаты: $A(1;\,-9)$, $B(7;\,-1)$, $C(2;\,8)$.

3.2. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(12;\,0)$, перпендикулярно прямой $5x+y+3=0$.

3.3. Указать уравнение окружности, которая проходит через точку $A(11;6)$ с центром в точке $C(-1;1)$.

3.4. Найти радиус окружности $x^2-8x+y^2+4y=5$.

Вариант 9

1. Линейная алгебра

1.1. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $C=B^T+2A$.

1.2. Дано $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $A\cdot B$.

1.3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 6 & -1 & 7 \end{vmatrix}$.

1.4. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=2, \\ x_1+5x_2-4x_3=-5, \\ 4x_1+x_2-3x_3=-4. \end{cases}$

2. Векторная алгебра

2.1. Найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ и его длину, если $A(5;-3;-4)$, $B(4;-1;2)$.

2.2. Даны векторы $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, где $A(3;-2;0)$, $B(4;-4;1)$, и $\vec{b}=\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$. Найти вектор $\vec{a}+2\vec{b}$.

2.3. Найти скалярное произведение векторов $\bar{a}=\bar{i}+2\bar{j}-\bar{k}$, $\bar{b}=\bar{i}-5\bar{j}+3\bar{k}$.

2.4. Найти косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}\cdot\vec{b}=1$, $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=6$.

2.5. Найти площадь треугольника с вершинами $A(1;-2;3)$, $B(0;-1;2)$, $C(0;-1;5)$.

2.6. Найти смешанное произведение векторов $\vec{a}=\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}-4\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{c}=2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$.

3. Аналитическая геометрия

3.1. Найти уравнение медианы CD треугольника ABC, если вершины имеют координаты: $A(12;\ 0)$, $B(0;\ -10)$, $C(0;\ 4)$.

3.2. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(-6;\ -3)$, параллельно прямой $x-y+11=0$.

3.3. Указать уравнение окружности, которая проходит через точку $A(7;9)$ с центром в точке $C(2;-3)$.

3.4. Найти радиус окружности $x^2-10x+y^2-2y=10$.

Вариант 10

1. Линейная алгебра

1.1. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 0\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$. Найти матрицу $C=B+A^T$.

1.2. Дано $A=\begin{pmatrix}5 & -1 & 2\\ 0 & 1 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 4\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Найти матрицу $A\cdot B$.

1.3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}1 & 2 & -3\\ -2 & 1 & 4\\ 3 & 0 & -1\end{vmatrix}$.

1.4. Решить систему уравнений $\begin{cases}2x_1-4x_2+3x_3=1,\\ x_1-2x_2+4x_3=3,\\ 3x_1-x_2+5x_3=2.\end{cases}$

2. Векторная алгебра

2.1. Найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ и его длину, если $A(-3;-2;1)$, $B(4;-6;2)$.

2.2. Даны векторы $\vec{a}=(-1;3;-1)$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$, $B(2;-3;-1)$ $C(2;-3;0)$. Найти вектор $2\vec{a}-\vec{b}$.

2.3. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=3$ и угол между ними 45°.

2.4. Найти косинус угла между векторами $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ и $\vec{b}=(1;3;-1)$.

2.5. Найти векторное произведение векторов $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}-4\vec{j}+2\vec{k}$.

2.6. Найти объём пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{k}$, $\vec{c}=\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$.

3. Аналитическая геометрия

3.1. Найти уравнение медианы CD треугольника ABC, если вершины имеют координаты: A(-6; -3), B(10; -1), C(11; -5).

3.2. Найти уравнение прямой, проходящей через точку A(-6; -3), перпендикулярно прямой $6x-3y+1=0$.

3.3. Указать уравнение окружности, которая проходит через точку A(11;8) с центром в точке C(-1;3).

3.4. Найти радиус окружности $x^2+10x+y^2+6y=2$.

Контрольные задания (2 семестр)

Вариант 1

Предел

Найти пределы:

а).	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1}$	б).	$\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8}$
в).	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x-7}{3x^4+2x^3+1}$	г).	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{x\cdot\sin 4x}$

Производная

Найти производные следующих функций:

а).	$y=\sqrt[3]{x^4+5x^2}$	б).	$y=\frac{1-tgx}{1+tgx}$
в).	$y=sin^3 5x\cdot x$	г).	$y=e^{2+ctgx}$
д).	$y=arctg2x+\frac{1}{x}$	е).	$y=\ln(cosx)$

Исследование функций

Исследовать функции и построить их графики:

а).	$y=x^3+x^2-8x+7$	б).	$y=\dfrac{x^2}{x+3}$

Интегралы

1. Найти неопределённые интегралы:

а).	$\int(6x-2)dx$	б).	$\int\dfrac{dx}{3-4x}$
в).	$\int\dfrac{xdx}{\cos^2 4x}$	г).	$\int\sin 2x\cdot\cos 6x\,dx$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y^2=x+1,\quad x=0$$

Дифференциальные уравнения

Решить дифференциальные уравнения:

а).	$\sqrt{y^2+1}=xyy'$	б).	$y'-\dfrac{3y}{x+1}=(x+1)^4$

Вариант 2

Предел

Найти пределы:

а).	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-9x+10}{x^2+3x-10}$	б).	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$
в).	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x+1}{7x+5}$	г).	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\frac{x}{2}}{x^3-4x}$

Производная

Найти производные следующих функций:

а).	$y=\sqrt{(4x-3)^3}$	б).	$y=\frac{\sin 3x}{1+\cos x}$
в).	$y=tg^3 5x\cdot x$	г).	$y=(e^{ctgx}+5)^2$
д).	$y=arcsin3x-3lnx$	е).	$y=arctg(e^x)$

Исследование функций

Исследовать функции и построить их графики:

а).	$y=2x^3-3x^2$	б).	$y=\dfrac{3-x^2}{x+2}$

Интегралы

1. Найти неопределённые интегралы:
2.

а).	$\int(7x-10)dx$	б).	$\int\sqrt[4]{1-2x}dx$
в).	$\int x\cdot sin\frac{x}{2}dx$	г).	$\int\ \sin 3x\cdot\sin 5x\,dx$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y=4x-x^2,\quad y=0$$

Дифференциальные уравнения

Решить дифференциальные уравнения:

а).	$y'x^3=2y$	б).	$y'-\dfrac{2y}{x+1}=(x+1)^3$

Вариант 3

Предел

Найти пределы:

а).	$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2+2x-1}{-x^2+x+2}$	б).	$\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}$
в).	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+4x-x^4}{x+3x^2+2x^4}$	г).	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{x^2-2x}$

Производная

Найти производные следующих функций:

а).	$y=\sqrt[4]{(x^3+2)^3}$	б).	$y=\frac{ctg4x+1}{lnx}$
в).	$y=\sqrt{x}\cdot arcsin\frac{x}{2}$	г).	$y=3^{cos^2x+1}$
д).	$y=tg2x+\frac{4}{x-2}$	е).	$y=sin(e^x)$

Исследование функций

Исследовать функции и построить их графики:

а).	$y=\dfrac{x^3}{3}-x^2-3x$	б).	$y=\dfrac{x^2}{x-4}$

Интегралы

1. Найти неопределённые интегралы:

а).	$\int(2-3x^2)dx$	б).	$\int\frac{dx}{\sqrt{4-5x}}$
в).	$\int x\cdot e^{3x}dx$	г).	$\int\cos 4x\cdot\cos 8x\,dx$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y=\cos x\,,\quad y=0,\qquad x=0,\qquad x=\frac{\pi}{2}$$

Дифференциальные уравнения

Решить дифференциальные уравнения:

а).	$yy'+x=0$	б).	$x^2y'=y(x+y)$

Вариант 4

Предел

Найти пределы:

а).	$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{3x^2+x-10}$	б).	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$
в).	$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^4+2x-5}{2x^2+x+7}$	г).	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{3x-x^2}$

Производная

Найти производные следующих функций:

а).	$y=\sqrt[3]{x^3-5}$	б).	$y=\frac{1+e^x}{1-e^x}$
в).	$y=\frac{1}{x}\cdot arcsin2x$	г).	$y=2^{cos5x-1}$
д).	$y=sin^5(3x+1)$	е).	$y=arctg(lnx)$

Исследование функций

Исследовать функции и построить их графики:

а).	$y=2x^3-6x^2-18x+7$	б).	$y=\dfrac{x^2}{x-2}$

Интегралы

1. Найти неопределённые интегралы:

а).	$\int(3x^2-2)dx$	б).	$\int\dfrac{dx}{2-5x}$
в).	$\int\dfrac{xdx}{\cos^2\frac{x}{3}}$	г).	$\int\sin 7x\cdot\cos 3x\,dx$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y^2=2-x,\quad x=0$$

Дифференциальные уравнения

Решить дифференциальные уравнения:

а).	$xyy'=x^2+1$	б).	$y'=\dfrac{y}{x}+2\sqrt{\dfrac{y}{x}}$

Вариант 5

Предел

Найти пределы:

а).	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{2x^2-9x+10}$	б).	$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$
в).	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^5-x^3}{5x^2+3x-6}$	г).	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{5x^2-x}$

Производная

Найти производные следующих функций:

а).	$y=\frac{2}{\sqrt{x^3+4}}$	б).	$y=\frac{ln\,x}{x^2+2\ln x}$
в).	$y=x\cdot tg^3\frac{x}{2}$	г).	$y=5^{sin2x+4}$
д).	$y=arccos(3x-1)-\frac{1}{x^2}$	е).	$y=\arcsin(e^x)$

Исследование функций

Исследовать функции и построить их графики:

а).	$y=x^4-2x^2+5$	б).	$y=x+\dfrac{1}{x}$

Интегралы

1. Найти неопределённые интегралы:

а).	$\int(2x-3x^3)dx$	б).	$\int\dfrac{dx}{\sqrt[3]{3+4x}}$
в).	$\int x\cdot\sin 2x\,dx$	г).	$\int\cos 4x\cdot\cos x\,dx$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y=2x-x^2,\quad y=0$$

Дифференциальные уравнения

Решить дифференциальные уравнения:

а).	$(x^2-1)y'-y=0$	б).	$y'-2xy=xe^{x^2}$

Вариант 6

Предел

Найти пределы:

а).	$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x^2-2x-40}{x^2-3x-4}$	б).	$\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}{2x^2-x-21}$
в).	$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^7-2x+3}{3x^4+5x^2+1}$	г).	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2x}{x^2-x}$

Производная

Найти производные следующих функций:

а).	$y=\sqrt[3]{x^5+5x}$	б).	$y=\frac{ctg2x-1}{x^2}$
в).	$y=sin\frac{x}{2}\cdot\sqrt{x^2+1}$	г).	$y=e^{\cos 4x-2}$
д).	$y=arctg^3x-\ln 9x$	е).	$y=\arccos(lnx)$

Исследование функций

Исследовать функции и построить их графики:

а).	$y=x^3-3x^2+6x-2$	б).	$y=\dfrac{x^2-1}{x-2}$

Интегралы

1. Найти неопределённые интегралы:

а).	$\int(4x^2-3)dx$	б).	$\int\sqrt[3]{2+3x}dx$
в).	$\int x\cdot\cos 4x\,dx$	г).	$\int\sin 2x\cdot\sin 3x\,dx$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y=\sin 2x,\quad y=0,\qquad x=0,\qquad x=\frac{\pi}{2}$$

Дифференциальные уравнения

Решить дифференциальные уравнения:

а).	$xy'-y=0$	б).	$y'=cos^2\frac{y}{x}+\frac{y}{x}$

Вариант 7

Предел

Найти пределы:

а).	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^2+x-5}{x^2-2x+1}$	б).	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3x^2+1}-1}{x^3+x^2}$
в).	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x^2+4}{x^4+5x-1}$	г).	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg9x}{\sin 7x}$

Производная

Найти производные следующих функций:

а).	$y=\frac{2}{x}-\sqrt{3x+x^2}$	б).	$y=\frac{tg\frac{x}{2}}{sinx+1}$
в).	$y=(1-ctg3x)\cdot e^{-x}$	г).	$y=4^{\,ln2x+3}$
д).	$y=\frac{3}{x^3}+cos^4\frac{x}{4}$	е).	$y=\arcsin(lnx)$

Исследование функций

Исследовать функции и построить их графики:

а).	$y=x^3+6x^2+9x$	б).	$y=\dfrac{x^2}{x-3}$

Интегралы

1. Найти неопределённые интегралы:
2.

а).	$\int(4x^5+3)dx$	б).	$\int\frac{dx}{\sqrt{3x+1}}$
в).	$\int x\cdot cos4x\,dx$	г).	$\int\sin 5x\cdot\cos x\,dx$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y^2=4x,\quad x=4,\qquad y=0$$

Дифференциальные уравнения

Решить дифференциальные уравнения:

а).	$2y'\sqrt{x}-y=0$	б).	$y'-\dfrac{y}{2x}=x^2$

Вариант 8

Предел

Найти пределы:

а).	$\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-2x-35}{2x^2+11x+5}$	б).	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}$
в).	$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{9x^3-4x^2+9}{8x^3+5x^2-2}$	г).	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg5x}{x-x^2}$

Производная

Найти производные следующих функций:

а).	$y=\frac{x^2}{4}-\sqrt{x^2-4x}$	б).	$y=\frac{1+cos\,x}{1-\sin 3\,x}$
в).	$y=(x^3+7x)\cdot tg5x$	г).	$y=e^{arcctg\frac{x}{3}}$
д).	$y=\sqrt[3]{arcsin3x}$	е).	$y=\ln(ctgx)$

Исследование функций

Исследовать функции и построить их графики:

а).	$y=x^4-8x^2+5$	б).	$y=\dfrac{x^2}{x+4}$

Интегралы

1. Найти неопределённые интегралы:
2.

а).	$\int(3-x^2)dx$	б).	$\int\sqrt[3]{5x+2}\,dx$
в).	$\int\dfrac{xdx}{\sin^2\frac{x}{2}}$	г).	$\int\sin 5x\cdot\sin 2x\,dx$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y=\frac{x^2}{4},\ \ x=4,\qquad y=0$$

Дифференциальные уравнения

Решить дифференциальные уравнения:

а).	$\sqrt{1-y^2}+y'y\sqrt{1-x^2}=0$	б).	$y'=e^{\frac{y}{x}}+\dfrac{y}{x}$

Вариант 9

Предел

Найти пределы:

а).	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x^2-3x-10}{x^2-4x+4}$	б).	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+3x^2}-2}{5x^3+x^2}$
в).	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5+7x^2+42}{x^4+15x-1}$	г).	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg8x}{\sin 3x}$

Производная

Найти производные следующих функций:

а).	$y=\sqrt{4x-x^3}+\frac{3x}{2}$	б).	$y=\frac{ctg(4x-1)}{4x-1}$
в).	$y=ln7x\cdot\sin(x^2+1)$	г).	$y=7^{tg(x+4)-2}$
д).	$y=arctg^3\frac{x}{3}$	е).	$y=\cos(e^x)$

Исследование функций

Исследовать функции и построить их графики:

а).	$y=\dfrac{x^3}{3}+x^2$	б).	$y=x-\dfrac{1}{x}$

Интегралы

1. Найти неопределённые интегралы:
2.

а).	$\int(4x^5+7x^2)dx$	б).	$\int\dfrac{dx}{8-3x}$
в).	$\int x\cdot e^{\frac{x}{2}}dx$	г).	$\int\cos 5x\cdot\cos x\,dx$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y=\frac{4}{x},\quad x=1,\quad y=0,\quad x=4$$

Дифференциальные уравнения

Решить дифференциальные уравнения:

а).	$x^2y'+y=0$	б).	$y'-\dfrac{2y}{x}=\dfrac{3}{x^2}$

Вариант 10

Предел

Найти пределы:

а).	$\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-5x-14}{2x^2-9x-35}$	б).	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}$
в).	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^2-3x+1}{3x^2+x-5}$	г).	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sin\frac{x}{3}}{tg\ 6x}$

Производная

Найти производные следующих функций:

а).	$y=\sqrt[4]{2-x^2}$	б).	$y=\frac{x+\sqrt{x}}{\ln 4x}$
в).	$y=(x^3+10x+5)\cdot tg\ 3x$	г).	$y=e^{sin\left(\frac{x}{2}\right)+5}$
д).	$y=cos^5 3x$	е).	$y=arctg(2^x)$

Исследование функций

Исследовать функции и построить их графики:

а).	$y=x^3-6x^2+9x+5$	б).	$y=x+\dfrac{4}{x}$

Интегралы

1. Найти неопределённые интегралы:
2.

а).	$\int(1+6x^2)dx$	б).	$\int\dfrac{dx}{2x+3}$
в).	$\int\dfrac{xdx}{\sin^2 4x}$	г).	$\int\sin 6x\cdot\cos 4x\,dx$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y=x^3,\ \ x=2,\ \ \ y=0$$

Дифференциальные уравнения

Решить дифференциальные уравнения:

а).	$y'\cdot\sqrt{1+y^2}=\dfrac{x^2}{y}$	б).	$y'=\dfrac{y}{x}-\dfrac{x}{y}$

Учебное – методическое пособие

Вдовин *Андрей Юрьевич,*
Демидова *Ирина Николаевна,*
Золкина *Людмила Александровна,*
Мухина *Валерия Михайловна,*
Рублева *Светлана Сергеевна,*
Удинцева *Светлана Николаевна,*
Федоровских *Елена Сергеевна*

МАТЕМАТИКА

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПЕРВЫХ КУРСОВ УРАЛЬСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ЛЕСОТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Редактор
Оператор компьютерной верстки

Подписано в печать
Формат
Уч.-изд. л. Усл. печ. л.
Тираж экз. (Первый завод экз.)
Заказ №

ФГБОУ ВО «Уральский государственный лесотехнический университет»
620100, Екатеринбург, Сибирский тракт, 37
Тел.: 8(343)262-96-10. Редакционно-издательский отдел

Типография ООО «ИЗДАТЕЛЬСТВО УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ ЦЕНТР УПИ»

620062, РФ, Свердловская область, Екатеринбург, ул. Гагарина, 35а, оф. 2.
Тел.: 8(343)362-91-16